אלגברה מופשטת 3 – תרגיל 6

הערה כללית: בהינתן הומומורפיזם בין שדות $\sigma: K \to L$ לרוב נכתוב σa עבור $\sigma(a)$ (באשר $a \in K$). זו כתיבה מקובלת. שימו לב ש-σ משרה הומומורפיזם חוגים מ-$K[x]$ ל-$L[x]$, שגם אותו סימנו ב-σ, המוגדר ע"י $\sigma\left(\sum_{i=1}^{k} b_i x^i\right) := \sum_{i=1}^{k} \sigma(b_i) x^i$. גם במקרה זה, לעיתים נכתוב σf במקום $\sigma(f)$ עבור $f \in K[x]$.

שאלה 1 (הכללה של דברים שהוכחנו בכיתה)

יהיו $E \supseteq K \supseteq F$ שדות. יהי $a \in E$ אלגברי מעל K ויהי $g(x) \in K[x]$ הפולינום המינימלי של a מעל K. הראו כי לכל $\sigma \in Gal(E/F)$, $\sigma(a)$ הוא שורש של $\sigma(g)$.[1]

הוכחה

נכתוב $g(x) = \sum_{i=0}^{k} b_i x^i$, אזי $(\sigma g)(x) = \sum_{i=0}^{k} \sigma(b_i) x^i$. כעת מתקיים:

$$(\sigma g)(\sigma a) = \sum_{i=1}^{k} \sigma(b_i)\sigma(a)^i = \sum_{i=1}^{k} \sigma\left(b_i a^i\right) = \sigma\left(\sum_{i=1}^{k} b_i a^i\right) = \sigma(0) = 0$$

(השוויון האדום נובע מכך ש-a שורש של g). לכן, σa שורש של σg. **משל.**

הערה: השתמשנו רק בעובדה ש-a שורש של g – אנו ננצל זאת בשאלה 2.

שאלה 2 (דברים שראינו אך לא הוכחנו בכיתה)

יהי F שדה, $f(x) \in F[x]$, ו-E שדה פיצול של f.

1. יהי K שדה כך ש-$E \supseteq K \supseteq F$ ויהי $\sigma_0: K \to E$ F-הומומורפיזם של שדות. הוכיחו כי קיים $\sigma \in Gal(E/F)$ כך ש-$\sigma|_K = \sigma_0$. [רמז: הראו כי E שדה פיצול של f מעל K.]
2. יהי $b \in E$ ויהי $g(x)$ הפולינום המינימלי של b מעל F. יהי $b' \in E$ שורש נוסף של $g(x)$. הראו כי קיים $\sigma \in Gal(E/F)$ כך ש-$\sigma(b) = b'$. [המלצה: העזרו בסעיף 1.]
3. "שילוב של שני הסעיפים הקודמים": יהי K שדה כך ש-$E \supseteq K \supseteq F$ ויהי $\sigma_0: K \to E$ F-הומומורפיזם של שדות. יהי $b \in E$ ויהי $g(x) \in K[x]$ הפולינום המינימלי של b מעל K. יהי b' שורש של $\sigma_0(g)$. הראו כי קיים $\sigma \in Gal(E/F)$ כך ש-$\sigma|_K = \sigma_0$ וגם $\sigma(b) = b'$.

הוכחה

הוכחת 1: קודם נראה כי E שדה פיצול של f מעל K: באמת, E שדה פיצול של f מעל F. לכן f מתפצל מעל E ולא מתפצל מעל אף תת שדה $E \supsetneq E' \supseteq F$. זה אומר ש-$f$ לא מתפצל מעל אף תת שדה $E \supsetneq E' \supseteq K$, אך כן מתפצל מעל E ולכן E שדה פיצול של f מעל K.

באותו אופן, E הוא שדה פיצול של f מעל $\sigma_0(K)$ ($\sigma_0(K) := \text{image}\ \sigma_0$). לכן, לפי משפט יחידות שדה הפיצול, קיים איזומורפיזם של שדות $\sigma: E \to E$ כך ש-$\sigma|_K = \sigma_0$. נתון ש-σ_0 הוא F-אוטומורפיזם ולכן לכל $a \in F$ מתקיים $\sigma(a) = \sigma_0(a) = a$, כלומר גם σ היא F-אוטומורפיזם ולכן $\sigma \in Gal(E/F)$. **משל.**

[1] תזכורת: עבור $g(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i$ הגדרנו $\sigma(g)(x) := \sum_{i=0}^{n} \sigma(\alpha_i)\, x^i$.

הוכחה 2: g הוא הפולינום המינימלי של b ושל b'. לכן, המפות $\psi,\psi': F[x]\to E$ המוגדרות ע"י $\psi(h(x)) = h(b), \psi'(h(x)) = h(b')$ משרות איזומורפיזמים $\hat{\psi}: F[x]/\langle g\rangle \to F[b]$ ו-$\hat{\psi}': F[x]/\langle g\rangle \to F[b']$ (משפט האיזו' הראשון). מפות אלו הן גם F-איזומורפיזמים. לכן, $\hat{\psi}'\circ\hat{\psi}^{-1}: F[b]\to F[b']$ היא גם F-איזומורפיזם. כעת, לפי סעיף 1 קיימת $\sigma\in Gal(E/F)$ כך ש-$\sigma|_{F[b]} = \hat{\psi}'\circ\hat{\psi}^{-1}$ ומתקיים $\sigma(b) = \hat{\psi}'\left(\hat{\psi}^{-1}(b)\right) = \hat{\psi}'(x+\langle g(x)\rangle) = (x)(b') = b'$, כדרוש.
משל.

הוכחה 3: לפי סעיף 1 קיימת $\tau\in Gal(E/F)$ כך ש-$\tau|_K = \sigma_0$. לפי *שאלה 1* (בתוספת ההערה), $\tau^{-1}(b')$ הוא שורש של $\tau^{-1}\sigma_0 g = \sigma_0^{-1}\sigma_0 g = g$. נפעיל את סעיף 2 על ההרחבה E/K (זהירות! g לא בהכרח ב-$F[x]$! בנוסף, E שדה פיצול של f מעל K כמו שהוסבר בסעיף 1) ונקבל שקיים K-הומומורפיזם $\gamma\in Gal(E/K)$ כך ש-$\gamma(b) = \tau^{-1}b'$. כעת נגדיר $\sigma = \tau\circ\gamma\in Gal(E/F)$. אזי $\sigma|_K = \tau\circ(\gamma|_K) = \tau\circ id_K = \tau|_K = \sigma_0$ ו-$\sigma(b) = \tau(\gamma(b)) = \tau\tau^{-1}b' = b'$, כדרוש. **משל.**

הערה: ניתן גם להוכיח באופן ישיר את 2 ו-3:

סעיף 2 הוא מקרה פרטי של 3, כאשר ב-3 בוחרים $K=F$ ו-$\sigma_0 = id_F$. אז מספיק להוכיח את 3.

נסמן $K' = \sigma_0(K)\subseteq E$ ונגדיר $\sigma_1: K[x]\to K'[b']$ באופן הבא: לכל $u\in K[b]$ קיים $h\in K[x]$ כך ש-$u = h(b)$. נגדיר $\sigma_1(u) = (\sigma_0(h))(b')$ (כלומר $\sigma_1(h(b)) = (\sigma_0 h)(b')$).

נראה ש-σ_1 מוגדרת היטב: אם $h_1(b) = h_2(b)$ אז $(h_1-h_2)(b) = 0$ ולפי שאלה 1 (בתוספת ההערה) נובע $0 = \left(\sigma_0(h_1-h_2)\right)(\sigma_0 b) = (\sigma_0(h_1)+\sigma_0(h_2))(b') = (\sigma_0 h_1)(b') - (\sigma_0 h_2)(b')$ ולכן $(\sigma_0 h_1)(b') = (\sigma_0 h_2)(b')$, כדרוש.

נראה ש-σ_1 הוא F-הומומורפיזם של שדות ו-$\sigma_1|_K = \sigma_0$: יהיו $h_1,h_2\in K[x]$, אזי

$$\sigma_1\left(h_1(b)h_2(b)\right) = \sigma_1\left((h_1h_2)(b)\right) = \left(\sigma_0(h_1h_2)\right)(b') = \left(\sigma_0(h_1)\cdot\sigma_1(h_2)\right)(b') = \left((\sigma_0(h_1))(b')\cdot(\sigma_0(h_2))(b')\right) = \sigma_1\left(h_1(b)\right)\cdot\sigma_1\left(h_2(b)\right)$$

$$\sigma_1\left(h_1(b)+h_2(b)\right) = \sigma_1\left((h_1+h_2)(b)\right) = \left(\sigma_0(h_1+h_2)\right)(b') = \left(\sigma_0(h_1)+\sigma_1(h_2)\right)(b') = \left((\sigma_0(h_1))(b')+(\sigma_0(h_2))(b')\right) = \sigma_1\left(h_1(b)\right)+\sigma_1\left(h_2(b)\right)$$

לכן, σ_1 משמרת חיבור וכפל.

לכל $c\in K$ מתקיים $\sigma_1(c) = \sigma_1\left((cx^0)(b)\right) = \left(\sigma_0(cx^0)\right)(b') = \left((\sigma_0 c)x^0\right)(b') = \sigma_0 c$ [2] ולכן $\sigma_1|_K = \sigma_0$. בפרט, נובע ש-σ_1 היא F הומומורפיזם (כי σ_0 היא f הומומורפיזם).

כעת, לפי סעיף 1 קיים $\sigma\in Gal(E/F)$ כך ש-$\sigma_1 = \sigma|_{K[b]}$. בפרט, נובע ש-$\sigma_0 = \sigma_1|_K = \sigma|_K$ ובנוסף, $\sigma(b) = \sigma_1(b) = b'$. **משל.**

שאלה 3

עבור כל אחד מהפולינומים הבאים מצאו את שדה הפיצול ואת חבורת הגלואה שלו. עבור כל איבר של החבורה כתבו את התמורה שהוא משרה על שורשי הפולינום וכן את הפעולה שלו על היוצרים של שדה הפיצול.

1. x^3-5 מעל $\mathbb{Q}$
2. x^7-1 מעל $\mathbb{Q}$
3. x^4+1 מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

[2] הנימוק הזה קצת מיותר. אתם רשאים לכתוב שנובע ישירות מההגדרה ש-$\sigma_1(c) = \sigma_0(c)$ לכל $c\in K$.

פיתרון

סעיף 1: השורשים של x^3-5 הם $\sqrt[3]{5},\rho_3\sqrt[3]{5},\rho_3^2\sqrt[3]{5}$ באשר ρ_3 שורש יחידה פרימיטיבי מסדר 3. נסמן אותם ב-1,2,3 בהתאמה. שדה הפיצול הוא $E\coloneqq\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5},\rho_3\sqrt[3]{5},\rho_3^2\sqrt[3]{5}]=\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5},\rho_3]$.
מתקיים $[E:\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]:\mathbb{Q}]\cdot[E:\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]]\leq 3\cdot[\mathbb{Q}[\rho_3]:\mathbb{Q}]=3\cdot 2=6$, אבל $[E:\mathbb{Q}]$ מתחלק ב-$[\mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}]:\mathbb{Q}]=3$ וב-$[\mathbb{Q}[\rho_3]:\mathbb{Q}]=2$ ולכן בהכרח $[E:\mathbb{Q}]=6$. הפולינום x^3-5 ספרבילי ולכן $|Gal(E/\mathbb{Q})|=[E:\mathbb{Q}]=6$.

$\sqrt[3]{5}$ יכול להישלח ע"י $\mathbb{Q}$-אוטומורפיזם רק אל שורשים של x^3-5 (הפולינום המינימלי שלו), כלומר רק אל $\sqrt[3]{5},\rho_3\sqrt[3]{5},\rho_3^2\sqrt[3]{5}$.
ρ_3 יכול להישלח ע"י $\mathbb{Q}$-אוטומורפיזם רק אל שורשים של x^2+x+1 (הפולינום המינימלי שלו), כלומר רק אל ρ_3,ρ_3^2.
בחבורת גלואה יש בדיוק 6 איברים שונים ולכן בהכרח כל 6 האפשרויות לשליחת $\sqrt[3]{5}$ ו-ρ_3 אל "צמודים" שלהם אפשריות. לכן, אברי חבורת גלואה הם:

ייצוג ע"י תמורה	ייצוג ע"י היוצרים	שם
id	$\sqrt[3]{5}\mapsto\sqrt[3]{5},\quad\rho_3\to\rho_3$	id_E
(1,2,3)	$\sqrt[3]{5}\mapsto\rho_3\sqrt[3]{5},\quad\rho_3\to\rho_3$	σ_1
(1,3,2)	$\sqrt[3]{5}\mapsto\rho_3^2\sqrt[3]{5},\quad\rho_3\to\rho_3$	$\sigma_2=\sigma_1^{-1}=\sigma_1^2$
(2,3)	$\sqrt[3]{5}\mapsto\sqrt[3]{5},\quad\rho_3\to\rho_3^2$	σ_3
(1,2)	$\sqrt[3]{5}\mapsto\rho_3\sqrt[3]{5},\quad\rho_3\to\rho_3^2$	$\sigma_4=\sigma_1\sigma_3$
(1,3)	$\sqrt[3]{5}\mapsto\rho_3^2\sqrt[3]{5},\quad\rho_3\to\rho_3^2$	$\sigma_5=\sigma_1^2\sigma_3$

הערה: אין חובה לעשות את עמודת השם, זה יהיה נוח להמשך. מהעמודה הימנית נובע ש- $Gal(E/\mathbb{Q})\cong S_3$.

סעיף 2: השורשים של x^7-1 ב-$\mathbb{C}$ הם $\rho_7,\rho_7^2,\dots,\rho_7^7=1$ באשר $\rho_7=\exp\left(\frac{2\pi i}{7}\right)$. נמספר אותם ב-1,2,...,7 בהתאמה. שדה הפיצול הוא $E\coloneqq\mathbb{Q}[\rho_7,\rho_7^2,\dots,\rho_7^7]=\mathbb{Q}[\rho_7]$. מתקיים $x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+\cdots+x+1)$ ולכן השורשים של $x^6+x^5+\cdots+x+1$ הם $\rho_7,\rho_7^2,\dots,\rho_7^6$.
בשיעור הראינו שהוא אי פריק ולכן זה הפולינום המינימלי של $\rho_7,\rho_7^2,\dots,\rho_7^6$ (של כל אחד מהם בנפרד) ולכן $\mathbb{Q}$-הומומורפיזם יכול לשלוח את ρ_7 רק אל אחד מ-$\rho_7,\rho_7^2,\dots,\rho_7^6$. לפי תרגיל 2 סעיף 2, אכן קיים הומומורפיזם כזה. לכן, אברי חבורת גלואה הם:

ייצוג ע"י תמורה	ייצוג ע"י היוצרים	שם
id	$\rho_7\mapsto\rho_7$	id_E
(1,2,4)(3,6,5)	$\rho_7\mapsto\rho_7^2$	$\sigma_1=\sigma_2^2$
(1,3,2,6,4,5)	$\rho_7\mapsto\rho_7^3$	σ_2
(1,4,2)(3,5,6)	$\rho_7\mapsto\rho_7^4$	$\sigma_3=\sigma_2^4$
(1,5,4,6,2,3)	$\rho_7\mapsto\rho_7^5$	$\sigma_4=\sigma_2^5$
(1,6)(2,5)(3,4)	$\rho_7\mapsto\rho_7^6=\rho_7^{-1}$	$\sigma_5=\sigma_2^3$

הערה: קל לראות כי $Gal(E/\mathbb{Q})\cong\mathbb{Z}_6$.

סעיף 3: לפי משפט דה מואבר (וגם לפי תרגיל בית מס' 1 שאלה 3) השורשים של x^4+1 ב-$\mathbb{C}$ הם $\rho_8,\rho_8^3,\rho_8^5,\rho_8^7$ באשר $\rho_8=\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$. נמספר אותם ב-1,2,3,4 בהתאמה. שדה הפיצול מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ הוא $E\coloneqq\mathbb{Q}[\sqrt{2}][\rho_8,\rho_8^3,\rho_8^5,\rho_8^7]=\mathbb{Q}[\sqrt{2}][\rho_8]$. היות ו-$\rho_8=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, מתקיים $E=\mathbb{Q}[\sqrt{2},i]$.

כי הוא מרוכב ולכן $i \notin \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ ולכן $\left[E:\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\right] > 1$. מצד שני, i שורש של x^2+1 ולכן $\left[E:\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\right] \le 2$. לכן בהכרח $\left[E:\mathbb{Q}[\sqrt{2}]\right] = 2$ והפולינום המינימלי של i מעל $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ הוא x^2+1.
זה אומר ש-$\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-הומומורפיזם יכול לשלוח את i רק ל-$\pm i$. לפי שאלה 2 סעיף 2 אכן קיימים איברים שעושים זאת ב-$Gal(E/\mathbb{Q}[\sqrt{2}])$ ולכן חבורת גלואה היא:

שם	ייצוג ע"י יוצרים	ייצוג ע"י תמורה
id_E	$i \mapsto i$	
σ	$i \mapsto -i$	*(1,4)(2,3)

* שימו לב ש-$\sigma(\rho_8) = \sigma\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\sigma(i)}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \rho_8^7$.

שאלה 4

יהי $\rho_3 = \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\right)$. חשבון את המימד של $\mathbb{Q}\left[2\rho_3 + \sqrt[3]{25} - 3\rho_3\sqrt[3]{5}\right]$ מעל $\mathbb{Q}$. [המלצה חמה: העזרו בשאלות קודמות. הפיתרון אמור לקחת כמה שורות.]

פיתרון

נסמן $\alpha = 2\rho_3 + \sqrt[3]{25} - 3\rho_3\sqrt[3]{5}$ ו-$K = \mathbb{Q}[\alpha]$ ו-$E = \mathbb{Q}[\sqrt[3]{5}, \rho_3]$. מתקיים $\alpha \in E$ ולכן $[K:\mathbb{Q}] \le [E:\mathbb{Q}] = 6$ (לפי שאלה 3 סעיף 1). יהי f הפולינום המינימלי של α מעל $\mathbb{Q}$. אזי $[K:\mathbb{Q}] = \deg f$. נראה של-f יש שישה שורשים שונים ולכן $\deg f \ge 6$. <u>אז ינבע בהכרח ש-$[K:\mathbb{Q}] = 6$</u>.

לפי שאלה 1, לכל $\sigma \in Gal(E/\mathbb{Q})$ מתקיים ש-$\sigma\alpha$ שורש של $\sigma f = f$. נבדוק שמתקבלים 6 שורשים שונים בדרך זו. נציג את השורשים כצירופים לינאריים של הבסיס $\left\{1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{5}^2, \rho_3, \rho_3\sqrt[3]{5}, \rho_3\sqrt[3]{5}^2\right\}$ וכך נדע שהם אכן שונים (זה בסיס כי זו קבוצה פורשת בגודל $[E:\mathbb{Q}]$). שימו לב ש-$\rho_3^2 = -\rho_3 - 1$. את $\sigma \in Gal(E/\mathbb{Q})$ חישבנו בשאלה 3 סעיף 1 ונשתמש בסימונים משם:

$$id_E(\alpha) = 2\rho_3 + \sqrt[3]{5}^2 - 3\rho_3\sqrt[3]{5}$$
$$\sigma_1(\alpha) = 2\rho_3 + \rho_3^2\sqrt[3]{5}^2 - 3\rho_3^2\sqrt[3]{5} = 2\rho_3 + 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5}^2 + 3\rho_3\sqrt[3]{5} - \rho_3\sqrt[3]{5}^2$$
$$\sigma_2(\alpha) = 2\rho_3 + \rho_3^4\sqrt[3]{5}^2 - 3\rho_3^3\sqrt[3]{5} = 2\rho_3 - 3\sqrt[3]{5} + \rho_3\sqrt[3]{5}$$
$$\sigma_3(\alpha) = 2\rho_3^2 + \sqrt[3]{5}^2 - 3\rho_3^2\sqrt[3]{5} = -2 - 2\rho_3 + 3\sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{5}^2 + 3\rho_3\sqrt[3]{5}$$
$$\sigma_4(\alpha) = 2\rho_3^2 + \rho_3^2\sqrt[3]{5}^2 - 3\rho_3^3\sqrt[3]{5} = -2 - 2\rho_3 - 3\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5}^2 - \rho_3\sqrt[3]{5}^2$$
$$\sigma_5(\alpha) = 2\rho_3^2 + \rho_3^4\sqrt[3]{5}^2 - 3\rho_3^4\sqrt[3]{5} = -2 - 2\rho_3 - 3\rho_3\sqrt[3]{5} + \rho_3\sqrt[3]{5}^2$$

אלו שישה שורשים שונים ולכן גמרנו.

בונוס

יהי F שדה ויהי $\bar{F}$ הסגור האלגברי של F. הוכיחו כי לכל שדה $F \subseteq K \subseteq \bar{F}$ ו-F-הומומורפיזם של שדות $\sigma: K \to \bar{F}$ קיים F-איזומורפיזם של שדות $\tau: \bar{F} \to \bar{F}$ כך ש-$\tau|_K = \sigma$. (זהירות: K/F אינה בהכרח הרחבה ממימד סופי. רמז: תזדקקו ללמה של צורן.)

הוכחה

קודם נראה שקיים F-*הומומורפיזם* $\tau: \bar{F} \to \bar{F}$ כך ש-$\tau|_K = \sigma$. אח"כ נוכיח ש-τ *איזומורפיזם*.

תהי X קבוצת הזוגות (L, γ) כך ש-$K \subseteq L \subseteq \bar{F}$ שדה ו-$\gamma: L \to \bar{F}$ מקיימת $\gamma|_K = \sigma$. הקבוצה X לא ריקה כי $(K, \sigma) \in X$. נגדיר יחס $\leq$ על X ע"י $(L, \gamma) \leq (L', \gamma')$ אם $L \subseteq L'$ ו-$\gamma'|_L = \gamma$. אזי $\leq$ הוא יחס סדר (נובע ישירות מההגדרה) ולכל שרשרת $\{(L_i, \gamma_i)\}_{i \in I}$ ב-X קיים חסם עליון שהוא $(\cup_{i \in I} L_i, \cup_{i \in I} \gamma_i)$ (הפונקציה $\cup_{i \in I} \gamma_i$ מוגדרת ע"י שליחת $x \in L_i$ אל $\gamma_i(x)$. זה מוגדר היטב כי אם $x \in L_j$ אז $(L_i, \gamma_i) \leq (L_j, \gamma_j)$ או להיפך. בה"כ מתקיים המקרה הראשון ואז $\gamma_j(x) = \left(\gamma_j|_{L_i}\right)(x) = \gamma_i(x)$). כעת, לפי הלמה של צורן, קיים ב-X איבר מקסימלי (L, τ).

נראה כי $L = \bar{F}$: אחרת, קיים $a \in \bar{F} \setminus L$. a אלגברי מעל F ולכן מעל L. יהי f הפולינום המינימלי של a מעל f. השדה $\bar{F}$ סגור אלגברית ולכן f מתפצל מעל $\bar{F}$. זה אומר ש-$\bar{F}$ מכיל שדה פיצול, E, של f מעל L. באותו אופן $\bar{F}$ מכיל שדה פיצול, E', של τf מעל $\tau(L)$. כעת לפי משפט, קיים איזומורפיזם שדות $\tau_1: E \to E' \subseteq \bar{F}$ כך ש-$\tau_1|_L = \tau$. אבל זה אומר ש-$(L, \tau) \gneqq (E, \tau_1)$ ($E \neq L$ כי $a \in E \setminus L$) ולכן קיבלנו סתירה למקסימליות (L, τ).

נותר להראות כי τ היא על (כל הומומורפיזם בין שדות הוא חח"ע אם הוא לא 0): τ חח"ע ולכן משרה איזומורפיזם שדות בין $\bar{F}$ ל-$\tau(\bar{F})$. היות ו-$\bar{F}$ סגור אלגברית, זה אומר ש-$\tau(\bar{F})$ סגור אלגברית. ההרחבה $\bar{F}/F$ היא אלגברית ולכן גם ההרחבה $\bar{F}/\tau(\bar{F})$ היא אלגברית (כי $F \subseteq \tau(\bar{F})$). אבל $\tau(\bar{F})$ סגור אלגברית ולכן בהכרח $\tau(\bar{F}) = \bar{F}$ (כי ההרחבה האלגברית היחידה של שדה סגור אלגברית K היא K/K).

משל.