

מבחן מועד ד' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה 05/09/24 – הצעה לפתרון מאת עדי מכנס

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: ד"ר ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x) \ln(1+5x)}{\tan(3x^2)}$

פתרון:

נשים לב תחילה לגבולות הללו:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2(x)} = 1$$

כעת ניעזר בעקרון WIN כדי לחשב את הגבול הנתון:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(2x) \ln(1+5x)}{\tan(3x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\arctan(2x)}{2x}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{3x^2}{\tan(3x^2)}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{\ln(1+5x)}{5x}}_{\rightarrow 1} \cdot \frac{2x \cdot 5x}{3x^2} = \frac{10}{3}$$

כאשר כלל הגבולות לעיל נתונים ע"י הצבה של רציפות בגבולות ידועים, וכן בגבולות שחישבתי לעיל.

ב. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x)$

פתרון:

מדובר במקרה של $0 \cdot \infty$. לכן:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} \stackrel{\text{L'Hopital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin(x) \tan(x)}{x} = \\ &= -(0 \cdot 1) = 0 \end{aligned}$$

עקב הגבול שחישבתי בסעיף הקודם.

ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(2^n)}}{(2n)!}$

פתרון:

ניעזר בכלל המנה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(2^{n+1})}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{2^{(2^n)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(2^{n+1}-2^n)}}{(2n+1)(2n+2)}$$

אבל נשים לב כי:

$$2^{n+1} - 2^n = 2 \cdot 2^n - 2^n = 2^n(2 - 1) = 2^n$$

ולכן עלינו לחשב את הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(2^n)}}{4n^2 + 6n + 2}$$

נשים לב כי החל משלב מסויים:

$$2^n > 4n^2 + 6n + 2$$

זאת, כיוון שקל לחשב כי הגבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{4n^2 + 6n + 2} = \infty$$

מסדר גודל. לפיכך, לפי הגדרת הגבול, החל משלב מסויים:

$$\frac{2^n}{4n^2 + 6n + 2} > 1$$

ומכאן:

$$2^n > 4n^2 + 6n + 2$$

לכן ניתן להגדיל את המכנה בגבול הנורא ולהקטין את הביטוי (שינוי מספר סופי של צעדים לא משפיע על התכנסות):

$$2^{(2^n-n)} = \frac{2^{(2^n)}}{2^n} \leq \frac{2^{(2^n)}}{4n^2 + 6n + 2}$$

אבל הרי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n - n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$$

מסדרי גודל. לפיכך:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{(2^n-n)} = \infty$$

ומכאן לפי חצי סנדוויץ' גם:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{(2^n)}}{4n^2 + 6n + 2} = \infty$$

ולכן כיוון שהמנה שואפת לאינסוף, גם הגבול הנתון בשאלה הוא אינסוף.

2.

א. חשבו את $\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} dx$.

פתרון:

נשים לב כי הנגזרת של $\tan(x)$ היא $\frac{1}{\cos^2(x)}$. לפיכך האינטגרנד הוא מכפלת הפונקציה בנגזרתה,

ומכאן:

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} dx = \frac{1}{2} \tan^2(x) + C$$

(לקוראים המבולבלים, הציבו $t = \tan(x)$ והיווכחו לראות כי אני צודק).

ב. חשבו את $\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^3+x} dx$.

פתרון:

נחלק פולינומים:

$$\frac{x}{x^4+x^2+x+1} \Big| \frac{x+1}{x^3+x} - \frac{x^4+x^2}{x+1}$$

כלומר:

$$\int \frac{x^4+x^2+x+1}{x^3+x} dx = \int x dx + \int \frac{x+1}{x^3+x} dx$$

נפרק לשברים חלקיים את האינטגרנד הימני ונקבל:

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

נעשה מכנה משותף ונקבל:

$$x+1 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$$

נציב $x=0$ ונקבל:

$$1 = A$$

כעת נשווה מקדמים:

$$x+1 = x^2+1+Bx^2+Cx$$

ולכן:

$$B=0$$

$$C=1$$

ובסה"כ:

$$\int \frac{x+1}{x^3+x} dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x^2+1} dx = \ln|x| + \arctan(x)$$

וסה"כ:

$$\frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \arctan(x) + C$$

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

פתרון:

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x$$

נשים לב שלכל $x \neq 0$, פונקציה זו רציפה כצירוף רציפות.

כעת, יהי $k \in \mathbb{N}$. נשים לב כי:

$$h\left(\frac{1}{\pi k}\right) = \sin(\pi k) - \frac{1}{\pi k} = -\frac{1}{\pi k} < 0$$

מצד שני, נשים לב בנוסף כי:

$$h\left(\frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(2\pi k + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} \geq 0$$

ולפיכך ממשפט ערך הביניים, בכל קטע $\left[\frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}, \frac{1}{\pi k}\right]$ ישנו שורש לפונקציה h (כי היא רציפה), ולכן יש אינסוף פתרונות לכל k טבעי.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $x + 1 = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

פתרון:

נעביר אגף ונבנה פונקציה:

$$h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x - 1$$

כעת, ברור (כמו מקודם) כי h רציפה לכל $x \neq 0$ כצירוף רציפות.

כמו מקודם, יהי $k \in \mathbb{N}$. נציב:

$$h\left(\frac{1}{-\pi k}\right) = \sin(-\pi k) + \frac{1}{\pi k} - 1 = 1 - \frac{1}{\pi k} > 0$$

וכן נציב:

$$h\left(\frac{1}{-2\pi k - \frac{\pi}{2}}\right) = \sin\left(-2\pi k - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} - 1 = -2 + \frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}} < 0$$

ולכן בכל קטע $\left[-\frac{1}{\pi k}, -\frac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}\right]$ ישנו שורש לפונקציה h - ומכאן שיש אינסוף פתרונות למשוואה (לכל טבעי).

4.

א. הוכיחו/הפריכו: $g(x) = x \cdot |x|$ גזירה בכל $\mathbb{R}$.

פתרון:

הוכחה

ידוע כי לכל $x \neq 0$ הפונקציה $|x|$ גזירה, ולכן מצירוף גזירות הפונקציה g גזירה לכל $x \neq 0$.
כעת עבור $x = 0$ נחשב את הנגזרת לפי הגדרה:

$$g'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} |h| = 0$$

ובסה"כ הפונקציה g גזירה בכל $\mathbb{R}$.

■ משל

ב. הוכיחו/הפריכו: תהי $f(x)$ הגזירה בנקודה x_0 , $f(x \cdot |x|)$ גזירה ב x_0 .

פתרון:

הפרכה

נגדיר את הפונקציה:

$$f(x) = \begin{cases} 42 & x \leq 4 \\ 17 & x > 4 \end{cases}$$

קל לראות כי הפונקציה f גזירה בנק' $x_0 = 2$, אך בנקודה $4 = 2 \cdot |2| = 4$ הפונקציה אינה גזירה.

אבל רגע? מה עם נגזרת של הרכבה? איך זה מסתדר??

התשובה היא שבנגזרת של הרכבה, דורשים שהחיצונית תהא גזירה ב $f(x_0)$, אבל זה לא בהכרח מתקיים כאן.

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + a_n + 1$, וכן $a_1 > 0$.
א. הוכיחו כי הסדרה מונוטונית עולה.

פתרון:

יהי n טבעי. נקבל כי:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{a_n} + 1 \geq 0$$

נוכיח באינדוקציה (זריזה ממש) כי לכל n מתקיים כי $a_n > 0$.

בסיס: נתון כי $a_1 > 0$.

צעד: יהי n עבורו הטענה מתקיים, נוכיח עבור $n + 1$. אכן:

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + a_n + 1 > 0$$

שכן זהו סכום חיוביים.

■ משל

ב. חשבו את גבול הסדרה.

פתרון:

כיוון שהסדרה מונוטונית, אזי היא מתכנסת לגבול סופי או שואפת לאינסוף. נב"ש כי היא מתכנסת לגבול סופי. נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה:

$$L \leftarrow a_n \leftarrow a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + a_n + 1 \rightarrow L$$

$$L = \frac{1}{L} + L + 1$$

$$\frac{1}{L} + 1 = 0$$

$$L = -1$$

אבל כיוון שהסדרה חיובית (הוכחנו), אזי מקרה זה לא יכול להיות, שכן אז החל משלב מסוים כלל האיברים יהיו שלילים, בסתירה.

לפיכך הגבול חייב להיות אינסוף.

6. א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n^3}}$$

פתרון:

נשים לב כי:

$$a_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n^3}} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{k}{n}} \stackrel{n \geq 0}{=} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{k}{n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

כאשר $f(x) = \sqrt{x}$. כיוון שפונקציה זו רציפה בקטע $[0,1]$, אזי גבול הסדרה הוא:

$$\int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[\frac{1}{1.5} \cdot x^{1.5} \right]_0^1 = \frac{1\sqrt{1}}{1.5} - 0 = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$$

ב. קרבו את $\frac{e}{\sqrt{e}}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

פתרון:

עלינו לקרב את:

$$\frac{e}{\sqrt{e}} = \sqrt{e} = e^{0.5}$$

נחשב לפי פולינום טיילור של הפונקציה $f(x) = e^x$, סביב הנקודה המצויה $a = 0$ ובנק' הרצויה $x = 0.5$.

בכדי לחשב את השגיאה, נדע כי לכל n :

$$f^{(n)} = e^x$$

לפיכך, לכל n קיים $0 < c < 0.5$ כך שמתקיים כי:

$$|R_n(0.5)| = \left| \frac{e^c (0.5 - 0)^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{e^c}{2^{n+1}(n+1)!} \leq \frac{e^1}{2^{n+1}(n+1)!} \leq \frac{3}{2^{n+1}(n+1)!} < \frac{1}{100}$$

קל לראות כי עבור $n = 3$ הנ"ל מתקיים (איזו הקלה!) ולכן עבור פ"ט מסדר 3 נקבל הדרוש. לכן:

$$P_3(e^x, 0)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

(יש לחשב זאת במבחן אבל זה די קל). נציב $x = 0.5$ ונקבל:

$$\sqrt{e} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{4}}{2} + \frac{\frac{1}{8}}{6} = 1.6458333 \dots$$