תרגול חזרה

שאלה

א. הצג דקדוק חופשי הקשר היוצר כל המילים מעל $\Sigma = [0, 1, 2, \dots 9]$ שבהן מספר הספרות הזוגיות שווה למספר הספרות האי זוגיות.

ב. בנה אוטומט מחסנית לשפה מסעיף א'.

פתרון

א. נגדיר G:

$$G = \langle V, T, S, P \rangle$$

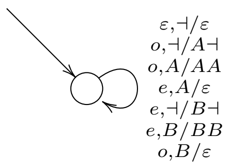
$$\begin{array}{lcl} S & \to & ESOS|OSES|\varepsilon \\ O & \to & 1|3|5|7|9 \\ E & \to & 0|2|4|6|8 \end{array}$$

ניתן דוגמת גזירה עבור 1221:

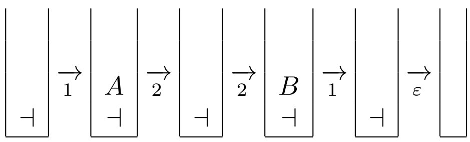
$$S \to OSES \to 1\varepsilon 2ESO \to 122\varepsilon 1 = 1221$$

ב. נשתמש בשיטת ריקון המחסנית. צריך לבחור א"ב למחסנית: $\Gamma = \{\dashv, A, B\}$

נסמן $o, e \in \Sigma$, $e \in [0, 2, \dots]$, $o \in [1, 3, \dots]$



דוגמת הרצה עבור 1221:



שאלה

הוכח L לא חופשית הקשר

$$L = \left\{ a^{j^2} \middle| j \geq 1 \right\}$$

פתרון

- נניח בשלילה L חופשית הקשר.
- יהי n מלמת הניפוח.
- נבחר $z = a^{n^2}$. מתקיים $z \in L$, $|z| \geq n$
- יהי פירוק $z = uvwxy$, $|uwx| \leq n$, $|vx| \geq 1$. נסמן:

$$\begin{aligned} u &= a^{k_1} \\ v &= a^{k_2} \\ w &= a^{k_3} \\ x &= a^{k_4} \\ y &= a^{n^2-k_1-k_2-k_3-k_4} \end{aligned}$$

מתקיים

$$k_2 + k_3 + k_4 \leq n \qquad k_2 + k_4 \geq 2$$

- נבחר $i \in \mathbb{N}_0$, $i = 2$ ונקבל ע"י הלמה

$$z' = u\left(v\right)^i w\left(x\right)^i y \in L$$

$$z' = a^{n^2+k_2+k_4}$$

- נראה ש$z' \notin L$. נתבונן ב

$$n^2 < n^2 + 1 \leq n^2 + k_2 + k_4 \leq n^2 + n < n^2 + 2n + 1 = \left(n+1\right)^2$$

$$\Rightarrow n^2 < n^2 + k_2 + k_4 < \left(n+1\right)^2$$

$\Leftarrow$ לא קיים $l \in \mathbb{N}_0$ כך שl^2 $n^2 + k_2 + k_4 =$, ולכן $z' \notin L$ $\Leftarrow$ סתירה, L לא חופשית הקשר.

שאלה

הוכח L מעל $\{a,b\}$ לא רגולרית:

$$L=\left\{(aa)^{2k}\,(bbb)^{3k}\middle|k\geq 0\right\}$$

א. ע"י סגירויות

ב. ע"י למת הניפוח

ג. ע"י נרוד

פתרון

א. נניח בשלילה L רגולרית, ונפעיל עליה פעולות עבורן מתקיימת סגירות במטרה להעבירה לשפה a^nb^n הלא רגולרית.

<u>לכאורה</u>: $\left(a^4\right)^k\left(b^9\right)^k\to 0^n1^n$

נניח בשלילה L רגולארית. נגדיר h הומומורפיזם $h:\{0,1\}\to\{a,b\}^*$ ע"י $\begin{array}{l}h(0)=a^5\\h(1)=b^9\end{array}$. מסגירות להומומורפיזם הפוך נקבל $h^{-1}(L)=0^n1^n$ שפה רגולארית.

סתירה!

ב. על רגל אחת: נבחר $z=a^{4n}b^{9n}$, $i=0$, $t\geq 0$, $\#_a(z')=4n-t\neq 4n$.

ג. נראה אינסוף מחלקות שקילות שמשרה היחס R_L.

נתבונן באוסף המילים האינסופי $w_i=a^{4i}$. לכל w_i,w_j, $i\neq j$, קיים $z=b^{9i}$ המפריד ביניהם, כלומר

$$w_1z=a^{4i}b^{9i}\in L\qquad w_2z=a^{4j}b^{9i}\notin L$$