

אלגברה לינארית תשפ"ה

סמסטר ב מועד ג

א' בחשוון ה'תשפ"ו, 23/10/2025

הוראות

- מרצים: אריאל ויצמן ותומר באואר.
- מתרגל: גל כהן.
- יש לענות על כל שאלות הבחינה. סך הניקוד הוא 104 נק', לא ניתן לקבל ציון מעל 100.
- אין חומר עזר, מותר מחשבון.
- זמן הבחינה: 3 שעות.
- המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר.
- יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

שאלות

1. נתונה המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו בסיסים לתתי-המרחבים הבאים של $\mathbb{R}^3$ (5 נק' לכל סעיף):

- i. $N(A)$
- ii. $C(A)$
- iii. $N(A) + C(A)$
- iv. $N(A) \cap C(A)$

(ב) (10 נק') האם A הפיכה?

אם כן מצאו את ההופכית A^{-1} , אם לא מצאו מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ $0 \neq B$ כך ש $AB = 0$.

2. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (8 נק' לסעיף):

(א) קיימת העתקה לינארית $T: \mathbb{R}_2[x] \rightarrow \mathbb{R}^2$ המקיימת את שני התנאים הבאים:

$$T(1+x) = T(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{i.}$$

$$1-x \in \ker T \quad \text{ii.}$$

(ב) עבור V ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, לכל $v, w \in V$ מתקיים:

$$\langle v-w, v+w \rangle = 0 \iff \|v\| = \|w\|$$

(ג) לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים: אם A הפיכה אז $A^2 + A$ הפיכה.

(ד) לכל מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים: המטריצה $A + A^t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ לכסינה.

(ה) הקבוצה

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ \bar{z} \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{C} \right\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

היא תת־מרחב של $\mathbb{C}^2$.

3. נתונה המטריצה $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ הבאה, התלויה בפרמטרים $a, b, c \in \mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} b & 0 & c \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & ab \end{pmatrix}$$

(א) (10 נק') בסעיף זה נניח $a \neq b$ ובנוסף $a, b \notin \{0, 1\}$. הוכיחו ש- A לכסינה.

(ב) (10 נק') בסעיף זה נניח $a \in \{0, 1\}$ ובנוסף $b \notin \{0, 1\}$. עבור אילו ערכי $a, b, c \in \mathbb{R}$ המטריצה A לכסינה?

4. (12 נק') נתונה המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

הסבירו מדוע המטריצה A לכסינה אורתוגונלית, ומצאו מטריצה P אורתוגונלית (כלומר, שעמודותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{R}^3$ לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית) ומטריצה אלכסונית D כך ש- $P^{-1}AP = D$.

בהצלחה!