

מבחן לדוגמה אינפי 1 מדמ"ח תשפ"א

משך המבחן שעתיים, משקל כל שאלה 25 נקודות; כל חומר עזר אסור למעט מחשבון פשוט.

1. הוכיחו שלכל x, y המקיימים: $0 < y \leq x < \frac{\pi}{2}$ מתקיים:

$$\frac{x-y}{\cos^2 y} + \tan y \leq \tan x \leq \frac{x-y}{\cos^2 x} + \tan y$$

2. נגדיר סדרה $\{a_n\}$ באופן הבא - $a_1 = 2$, ולכל n טבעי: $a_{n+1} = \frac{2a_n-1}{a_n+4}$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת וחשבו את גבולה.

3. (א) (12 נק') עבור אלו ערכים של $t > 0$ הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} t^{\ln n}$ מתכנס?

(ב) (13 נק') עבור אלו ערכים של $t > 0$ הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} t^{\sqrt{n}}$ מתכנס?

4. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) (12 נק') תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה בכל הממשיים המקיימת:

$$f(1) = 1, \text{ אזי, קיימת } c \in \mathbb{R} \text{ עבורה: } f(c) = -\ln c$$

(ב) (13 נק') תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה בכל הממשיים המקיימת:

$f'(x) > 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$, יהי $a_1 \in \mathbb{R}$ ונגדיר סדרה ע"י: $a_{n+1} =$

$$f(a_n) \text{ לכל } n. \text{ אזי, } |a_n| \rightarrow \infty$$

שאלות מיטיבות - כל אחת שווה 2 נק'.

1. חשבו את הגבול: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - e^{-\frac{1}{n}} \right)^{\sin \frac{1}{n}}$.

2. מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

בתחום $(1, \infty)$. יש כאן סכום של שורשים, אולי כדאי להכפיל בצמוד.

3. חשבו את f' כאשר: $f(x) = e^{x^{x^e}}$.

4. חשבו את סכום הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(n+2)(n+3)} + \frac{5^{1-n} \cdot 3^n}{6} \right)$.