פתרון בוחן - אלגברה לינארית 2 (88-113), סמסטר א׳, תשפ״ה

מרצים: ד״ר רוני ביתן, ד״ר ארז שיינר.
מתרגלים: אלעד עטייא, אושרית שטוסל, רועי תורג׳מן, יונתן סמידוברסקי.
אורך הבוחן: **90** דקות.
יש לענות על **כל** השאלות. בהצלחה!

שאלה 1: (36 נק׳) יהי $n \geq 2$ (טבעי). נגדיר מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ לפי

$$A_{ij} = \begin{cases} 2i & i \neq j \\ 0 & i = j \end{cases}$$

חשבו את $\det A$ (בטאו באמצעות n במידת הצורך).
<u>פתרון</u> נתבונן במטריצה

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n & 0 \end{pmatrix}$$

נסכום את כל העמודות לשורה האחרונה

$$A \overset{C_n \leftarrow C_n + C_1}{\longrightarrow} \overset{C_n \leftarrow C_n + C_2}{\longrightarrow} \ldots \longrightarrow \overset{C_n \leftarrow C_n + C_{n-1}}{\longrightarrow}$$

נבחין כי העמודה האחרונה היא סכום כל שורה, בכל שורה מופיעים $n-1$ פעמים $2i$ ופעם אחת 0.
סה״כ $2i\left(n-1\right)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\left(n-1\right) \\ 4 & 0 & 4 & 4 & \cdots & 4\left(n-1\right) \\ 6 & 6 & 0 & 6 & \cdots & 6\left(n-1\right) \\ 8 & 8 & 8 & 0 & \cdots & 8\left(n-1\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n & 2n\left(n-1\right) \end{pmatrix}$$

נוציא מהעמודה האחרונה $\left(n-1\right)$ ונקבל

$$|A| = \left(n-1\right) \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & \cdots & 4 \\ 6 & 6 & 0 & 6 & \cdots & 6 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2n & 2n & 2n & \cdots & 2n & 2n \end{pmatrix}$$

עכשיו, נחסיר מכל העמודות את העמודה C_n (כך נאפס את כל השורה פרט לאלכסון)
ב$n-1$ האיברים הראשונים באלכסון נקבל $0-2i=-2i$, בעמודה האחרונה נשאר $2n$.

$$\xrightarrow{\forall_{1\le i\le n-1} C_i\leftarrow C_i-C_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & \cdots & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & \cdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n \end{pmatrix}$$

קיבלנו

$$|A| = (n-1)\left|\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & \cdots & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & \cdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2n \end{pmatrix}\right|$$

נוציא 2 מכל n השורות, נוציא -1 מ$n-1$ השורות הראשונות

$$|A| = (n-1)\cdot 2^n \cdot (-1)^{n-1}\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots & 8 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}\right|$$

זו מטריצה משולשית, לכן הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון.

$$= (n-1)\cdot 2^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot (1\cdot 2\cdot 3\cdots n) = (n-1)\cdot 2^n\cdot(-1)^{n-1}\cdot n!$$

שאלה 2: (30 נק') תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך שהפולינום האופייני שלה **לא** מתפרק לגורמים לינאריים (מעל $\mathbb{R}$).
הוכיחו או הפריכו: A לכסינה מעל $\mathbb{C}$ עבור

(א) (10 נק') $n=2$.

(ב) (10 נק') $n=3$.

(ג) (10 נק') $n=4$.

<u>פתרון</u>

א) הוכחה -

דרך 1 - הפולינום האופייני מדרגה 2. נסמן $p_A(x)=ax^2+bx+c$.
לפי נוסחת השורשים, הערכים העצמיים (מעל $\mathbb{C}$) הם

$$\lambda_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

נשים לב שעל מנת שהפולינום האופייני לא יהיה מל"ל, יש לו שורש מרוכב אחד לפחות.
כלומר הדיסקרימיננטה שלילית, $b^2-4ac<0$.
זה אומר שמעל $\mathbb{C}$ יש שני ערכים עצמיים שונים (כדרגת המטריצה)

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\neq\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

לכן, לכסינה מעל $\mathbb{C}$.
נראה עוד כמה הוכחות (דומות) נחמדות של סטודנטים שהופיעו בבוחן.
דרך 2 - למטריצה ממשית, אם λ ע"ע, גם $\overline{\lambda}$.

$$Av=\lambda v\Rightarrow\overline{Av}=\overline{\lambda v}=A\overline{v}=\overline{\lambda}\cdot\overline{v}$$

יש לפחות ערך עצמי מרוכב אחד והצמוד שלו.
אפשר גם לצטט משפט מלינארית 1 - z שורש של פולינום במקדמים ממשיים אם ורק אם $\overline{z}$ שורש.
דרך 3 - למטריצה יכולים להיות שני ערכים עצמיים או ערך עצמי יחיד.
אם יש שני ערכים עצמיים שונים, סיימנו.
אחרת, יש ערך עצמי יחיד. ראינו בתרגול (של יונתן) שמטריצה בעלת ערך עצמי יחיד היא לכסינה אם ורק אם היא אלכסונית (עם הע"ע פעמיים על האלכסון). אכתוב כאן את ההוכחה בקצרה:
אכן, אם מטריצה בעלת ע"ע יחיד λ הייתה לכסינה, היא הייתה דומה לλI.
קל לראות שהמטריצה היחידה שדומה לλI היא λI

$$P^{-1}AP=\lambda I\Rightarrow A=\lambda I$$

עכשיו, במקרה שלנו: אילו יש לה ע"ע יחיד והיא לכסינה היא אלכסונית $\operatorname{diag}(\lambda,\lambda)$ אבל λ מרוכב (הפ"א לא מל"ל) והמטריצה צריכה להיות ממשית.
דרך 4 - יהיו $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ הערכים העצמיים (מעל המרוכבים הפ"א מל"ל) של המטריצה.
בגלל שהמטריצה לא מל"ל, אחד מהם לא ממשי. בה"כ $\lambda_1\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.
ידוע כי $\mathbb{R}\ni\operatorname{tr}(A)=\lambda_1+\lambda_2$, אילו היו שווים היינו מקבלים $\operatorname{tr}(A)=2\lambda_1\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.
למעשה זה גם מראה שהם צמודים.
ב) הוכחה - הפולינום האופייני מדרגה 3. ידוע כי לפולינום מדרגה אי-זוגית קיים לפחות שורש ממשי אחד (נובע מערך הביניים).
לכן, הפולינום מהצורה

$$p_A(x)=(x-\lambda_1)\,q(x)$$

כאשר $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ וכן $\deg q = 2$.
עכשיו, הפ"א לא מל"ל ולכן q לא מל"ל. בדומה לסעיף הקודם, $q(x) = (x-\lambda_2)\left(x-\overline{\lambda_2}\right)$ (עבור $\lambda_2 \in \mathbb{C}$).
סה"כ

$$p_A(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\left(x-\overline{\lambda_2}\right)$$

שלושתם שונים והמטריצה לכסינה.
ג) הפרכה - הטיעונים לעיל כבר לא עובדים. למשל אפשר לבנות פולינום אופייני מהצורה

$$\left(x^2+1\right)(x+1)^2 = (x+i)(x-i)(x+1)^2$$

ולגרום לכך שלע"ע -1 יהיה ר"ג 1.
באופן שקול, למצוא מטריצה שצורת הז'ורדן שלה היא

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = J_1(i) \oplus J_1(-i) \oplus J_2(1)$$

ולפי יחידות צורת ז'ורדן, מטריצה שזוהי צורת הז'ורדן שלה לא יכולה להיות לכסינה.
למשל, המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
היא מורכבת מבלוק לכסין עם ע"ע $i, -i$ ובלוק נוסף שהוא $J_2(1)$..

שאלה 3 (34 נק'): תהיינה $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצות נילפוטנטיות.
נתון כי שהריבוי הגיאומטרי של 0 כערך עצמי של A שווה לריבוי הגיאומטרי של 0 כערך עצמי של B.
הוכיחו או הפריכו:
(א) (17 נק') עבור $n=3$, ל-A, B אותה צורת ז'ורדן (עד כדי סדר הבלוקים).
(א) (17 נק') עבור $n=4$, ל-A, B אותה צורך ז'ורדן (עד כדי סדר הבלוקים).
פתרון
א) הוכחה -
טענת עזר למטריצה נילפוטנטית יש ערך עצמי יחיד אפס.
הוכחה ידוע שקיים k עבורו $A^k = 0$.
לכן, $f(x) = x^k$ מאפס של המטריצה. הפולינום המינימלי מחלק את המאפס ולכן

$$m_A(x) \,|x^k \Rightarrow m_A(x) = x^\ell$$

עבור $1 \le \ell \le 3$ (הדרגה של הפולינום המינימלי קטנה שווה משל האופייני שהיא 3)
דרך נוספת אם λ ע"ע של A אזי λ^k ע"ע של A^k, כי יש $v \neq 0$ עבורו $Av = \lambda v$ ומקבלים

$$A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1}(\lambda v) = \lambda A^{k-1} v = \lambda A^{k-2}(Av)$$

$$= \lambda A^{k-2}(\lambda v) = \lambda^2 A^{k-2} v = ... = \lambda^k v$$

מקבלים שכל ע"ע של המטריצה צריך לצאת בחזקת k אפס כי עבור $v \neq 0$

$$0 = 0 \cdot v = A^k v = \lambda^k v \Rightarrow \lambda = 0$$

עכשיו, אם יש להן אותה צורת ז'ורדן הן בפרט דומות:

$$PAP^{-1} = J = QBQ^{-1} \Rightarrow Q^{-1}PAP^{-1}Q = B \Rightarrow \left(P^{-1}Q\right)^{-1} A \left(P^{-1}Q\right)$$

לסיום, נראה שיש להן אותה צורת ז'ורדן.
כלומר, נראה שר"ג של מטריצה בעלת ערך עצמי יחיד (במקרה שלנו 0) מסדר 3 קובע ביחידות את צורת הז'ורדן.
אם הריבוי הגיאומטרי הוא 1 יש בדיוק בלוק ז'ורדן אחד $J_3(0)$.
אם הריבוי הגיאומטרי הוא 2, יש שני בלוקים שסכום גדליהם 3 - לכן, $J_2(0) \oplus J_1(0)$..
אם הריבוי הגיאומטרי הוא 3, יש שלושה בלוקים שסכום גדליהם 3 - לכן, $J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(0)$..
ב) הפרכה -
נסתכל על המטריצות הבאות

$$J_2(0) \oplus J_2(0)\,, J_3(0) \oplus J_1(0)$$

לשתיהן יש ר"ג 2 לע"ע 0 כי יש שני בלוקים בצורת הז'ורדן שלהן (שהיא המטריצה עצמה).
אבל הן לא דומות מיחידות צורת ז'ורדן.