# מבחן לינארית 1 קיץ תשפ"ד מועד א'

29.8.2024

מרצים: גיא בלשר, דניס גולקו, עוזי חרוש, ארז שיינר.
מתרגלים: עידו גולדנברג, רועי חסון, שירה ידעי, יונתן סמידוברסקי, עידו פלדמן, עידו קצב, ירדן שני.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- משך המבחן: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי – מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- יש לכתוב בכל תשובה פתרון מלא ומפורט.
- הניקוד לכל שאלה כתוב בתחילתה, והוא מתחלק באופן שווה בין הסעיפים.
- סך הנקודות במבחן הוא 109. ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לפתור. חלקו את זמנכם בתבונה!

**תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.**

**ניתן לענות משני צידי הדף.**

## בהצלחה!

**שאלה 1.** (10 נק' לכל סעיף) יהי $a \in \mathbb{C}$ פרמטר. נתבונן במטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & a^2 \\ -1 & a^2 & -a^2-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

ובקבוצה

$$U = \left\{ v \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, Av = A^t v \right\}.$$

א. קבעו לכל ערך של $a$ מהי הדרגה של המטריצה $A$.

ב. הוכיחו כי $U$ הוא תת־מרחב של $\mathbb{C}^3$ (מעל השדה $\mathbb{C}$).

ג. עבור $a = i$, מצאו בסיס ומימד ל-$U$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

פתרון.

א. נדרג את המטריצה $A$ על מנת לבדוק מתי הצורה המדורגת קנונית היא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} a^2+1 & 0 & a^2 \\ -1 & a^2 & -a^2-a \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ -1 & a^2 & -a^2-a \\ a^2+1 & 0 & a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftarrow R_3-(a^2+1)R_1]{R_2 \leftarrow R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a^2+1 & -a^2 \\ 0 & -a^2-1 & -a^3+a^2-a \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a^2+1 & -a^2 \\ 0 & 0 & -a^3-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & a^2+1 & a^2 \\ 0 & 0 & -a(a^2+1) \end{pmatrix}$$

אם $a \neq 0, \pm i$, אז קיבלנו מטריצה מדורגת ללא שורות אפסים, ולכן הדרגה היא 3.
אם $a = 0$, המטריצה שקיבלנו היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שהיא מדורגת ובעלת שתי שורות שונות מאפס, לכן הדרגה היא 2.
אם $a = \pm i$, המטריצה שקיבלנו היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \pm i \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שהיא גם כן מדורגת ובעלת שתי שורות שונות מאפס, לכן הדרגה היא 2.
לסיכום: הדרגה היא 3 אם $a \neq 0, \pm i$, אחרת הדרגה היא 2.

ב. נשים לב כי

$$U = \left\{ v \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, Av = A^t v \right\} = \left\{ v \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, (A - A^t)v = 0 \right\} = N(A - A^t)$$

כלומר $U$ הוא מרחב האפס של מטריצה, ולכן לפי משפט מההרצאה הוא תת־מרחב של $\mathbb{C}^3$. אפשר גם להוכיח ישירות עם הקריטריון המקוצר.

ג. נציב $a = i$ ונקבל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1-i \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}.$$

לכן

$$A - A^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1-i \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1-i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -i \\ 2 & i & 0 \end{pmatrix}$$

נדרג למציאת בסיס למרחב האפס:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -i \\ 2 & i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 2R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & i & -2i \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - iR_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow -R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן את המשתנה החופשי $z = t$ ונקבל $x = -it$ ו-$y = 2t$. לכן הפתרון הכללי הוא $\begin{pmatrix} -it \\ 2t \\ t \end{pmatrix}$. נסיק כי בסיס ל-$U$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, והמימד הוא 1.

**שאלה 2.** (8 נק' לכל סעיף)

א. קבעו כמה העתקות לינאריות $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ מקיימות את התנאים

$$\begin{aligned} T(1-x) &= -1 - x + x^2 \\ T(1-x^2) &= 1 - x^2 \\ T(1-2x+x^2) &= -3 - 2x + 3x^2 \end{aligned}$$

והוכיחו את תשובתכם.

ב. מצאו נוסחה מפורשת להעתקה $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המקיימת את תנאי הסעיף הקודם וגם $T(1+x-x^2) = x$. כלומר, עליכם למצוא את $T(a+bx+cx^2)$ לכל $a,b,c \in \mathbb{R}$.

ג. מצאו בסיס ומימד עבור $\ker T$ ו-$\operatorname{Im} T$ להעתקה שמצאתם בסעיף הקודם.

פתרון.

א. נבדוק האם $\left\{1-x, 1-x^2, 1-2x+x^2\right\}$ הם בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$. לצורך כך נשים בעמודות מטריצה ונבדוק האם אחרי הדירוג יש משתנים חופשיים:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנה האחרון הוא משתנה חופשי, ולכן הווקטורים המקוריים הם ת"ל. כיוון שבשתי העמודות הראשונות יש איבר מוביל, שני הפולינומים הראשונים הם בת"ל ופורשים את הפולינום השלישי. כיוון ש-$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ הוא פתרון של המערכת, אז

$$-2(1-x) + 1(1-x^2) + 1(1-2x+x^2) = 0\,,$$

ולכן

$$1 - 2x + x^2 = 2(1-x) - 1(1-x^2).$$

עוד נשים לב כי

$$2T(1-x) - T(1-x^2) = 2(-1-x+x^2) - (1-x^2) = -3 - 2x + 3x^2 = T(1-2x+x^2).$$

לכן כל העתקה לינארית שמקיימת את שני התנאים הראשונים מקיימת גם את התנאי השלישי, כלומר הוא מיותר. נשים לב שהפולינומים $1-x, 1-x^2$ הם בת"ל, אך אינם בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$ – כי המימד של $\mathbb{R}_2[x]$ הוא 3. נשלים אותם לבסיס של $\mathbb{R}_2[x]$ על ידי הוספת איזשהו פולינום, למשל הפולינום 1. לכל בחירה של $T(1) = p(x)$, לפי משפט ההגדרה, קיימת העתקה לינארית המקיימת את תנאי השאלה וגם $T(1) = p(x)$. לכן יש אינסוף העתקות לינאריות כאלו.

ב. נוודא כי $B=\left\{1-x,1-x^2,1+x-x^2\right\}$ הוא בסיס ל-$\mathbb{R}_2[x]$ וגם נביע פולינום כללי על ידי צירוף לינארי שלהם, על ידי כך שנשים את הפולינומים בעמודות מטריצה ובעמודת הקבועים נשים פרמטרים:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\-1&0&1&b\\0&-1&-1&c\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&a+b\\0&-1&-1&c\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&a+b\\0&0&1&a+b+c\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_2\leftarrow R_2-2R_3]{R_1\leftarrow R_1-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&-b-c\\0&1&0&-a-b-2c\\0&0&1&a+b+c\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&a+c\\0&1&0&-a-b-2c\\0&0&1&a+b+c\end{array}\right)$$

לכן

$$a+bx+cx^2=(a+c)(1-x)+(-a-b-2c)(1-x^2)+(a+b+c)(1+x-x^2)$$

ונקבל

$$\begin{aligned}T(a+bx+cx^2)&=(a+c)T(1-x)+(-a-b-2c)T(1-x^2)+(a+b+c)T(1+x-x^2)\\&=(a+c)(-1-x+x^2)+(-a-b-2c)(1-x^2)+(a+b+c)x\\&=(-2a-b-3c)+bx+(2a+b+3c)x^2\end{aligned}$$

ג. כדי לחשב בסיס לגרעין ולתמונה, ניעזר במטריצה המייצגת. נסמן על ידי $S=\left\{1,x,x^2\right\}$ את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$. לכן

$$[T]_S^S=\begin{pmatrix}-2&-1&-3\\0&1&0\\2&1&3\end{pmatrix}$$

צריך למצוא בסיסים למרחב העמודות ולמרחב האפס. נדרג:

$$\begin{pmatrix}-2&-1&-3\\0&1&0\\2&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_1}\begin{pmatrix}-2&-1&-3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+R_2}\begin{pmatrix}-2&0&-3\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow -\frac{1}{2}R_1}\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{2}\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

בשתי העמודות הראשונות יש איבר מוביל, לכן בסיס לקואורדינטות של התמונה הוא שתי העמודות הראשונות של $[T]_S^S$. צריך לחזור לווקטורים של המרחב המקורי ולכן הבסיס לתמונה הוא $\left\{-2+2x^2,-1+x+x^2\right\}$ והמימד הוא 2.

עבור הגרעין, צריך למצוא בסיס למרחב האפס. כאן אפשר לראות שבסיס למרחב הפתרונות הוא $\left\{\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$, ולכן בסיס לגרעין הוא $\left\{-3+2x^2\right\}$ והמימד הוא 1.

**שאלה 3.** (7 נק' לכל סעיף) יהי $n\geq 2$ מספר טבעי, ותהי $M\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה כלשהי. נגדיר תת־קבוצה $U$ של $\mathbb{F}^{n\times n}$ לפי

$$U=\left\{A\in\mathbb{F}^{n\times n}\,\middle|\,AM=A\right\}.$$

א. הוכיחו כי לכל $A\in U$ ולכל $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ מתקיים $BA\in U$.

ב. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. הוכיחו כי $A\in U$ אם ורק אם $C(M-I)\subseteq N(A)$.

פתרון.

א. תהיינה $A\in U$ ו-$B\in\mathbb{F}^{n\times n}$. מכך ש-$A\in U$ נסיק $AM=A$. לכן $(BA)M=B(AM)=BA$, כלומר $BA\in U$.

ב. תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$. נשים לב כי $AM=A$ אם ורק אם $A(M-I)=0$, אם ורק אם כל העמודות של $A(M-I)$ הן אפס – כלומר לכל $1\leq j\leq n$ מתקיים $C_j(A(M-I))=0$.
ניעזר בכפל לפי עמודות, ונקבל $C_j(A(M-I))=AC_j(M-I)$. כמו כן, $AC_j(M-I)=0$ אם ורק אם $C_j(M-I)\in N(A)$.
נסכם: $AM=A$ אם ורק אם לכל $1\leq j\leq n$ מתקיים $C_j(A(M-I))=0$, אם ורק אם לכל $1\leq j\leq n$ מתקיים $C_j(M-I)\in N(A)$. אבל $C_1(M-I),\dots,C_n(M-I)$ הן קבוצה פורשת של $C(M-I)$, ולכן התנאי האחרון מתקיים אם ורק אם $C(M-I)\subseteq N(A)$.

**שאלה 4.** (7 נק' לכל סעיף) יהי $V$ מרחב וקטורי נוצר סופית ממימד $n$ מעל שדה $\mathbb{F}$. נניח כי $n \geq 2$.
נגדיר שתת־מרחב $U \leq V$ הוא **על־מישור** אם $\dim U = n-1$.

א. הוכיחו או הפריכו: אם $U_1, U_2 \leq V$ על־מישורים שונים, אז $\dim(U_1 \cap U_2) = n-2$.

ב. הוכיחו שאם $W \leq V$ הוא תת־מרחב כך ש-$\dim W = n-2$, אז קיימים על־מישורים $U_1, U_2 \leq V$ כך ש-$U_1 \cap U_2 = W$.

ג. נניח כי $n \geq 3$. הוכיחו או הפריכו: אם $U_1, U_2, U_3 \leq V$ על־מישורים שונים, אז $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = n-3$.

פתרון.

א. הוכחה. לפי משפט המימדים,

$$\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2)\ .$$

אנחנו יודעים ש-$\dim U_1 = \dim U_2 = n-1$, לכן נותר לחשב את $\dim(U_1 + U_2)$. מצד אחד, $U_1 + U_2 \subseteq V$, ולכן $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim V = n$. מצד שני, $U_1 \subseteq U_1 + U_2$, ולכן $n-1 = \dim U_1 \leq \dim(U_1 + U_2)$. קיבלנו ש-$\dim(U_1 + U_2)$ הוא בהכרח $n-1$ או $n$.
נניח בשלילה כי $\dim(U_1 + U_2) = n-1$. כיוון ש-$U_1 \subseteq U_1 + U_2$ והם מאותו מימד, מהכלה ושוויון מימדים נקבל $U_1 = U_1 + U_2$. אבל $U_2 \subseteq U_1 + U_2$, לכן $U_2 \subseteq U_1$, ומהכלה ושוויון מימדים נקבל $U_1 = U_2$ – בסתירה להנחה שהם שונים.
לכן $\dim(U_1 + U_2) = n$, וממשפט המימדים שכתבנו בהתחלה נקבל

$$\dim(U_1 \cap U_2) = (n-1) + (n-1) - n = n-2$$

כנדרש.

ב. יהי $w_1, \ldots, w_{n-2}$ בסיס של $W$. נשלים אותו לבסיס $w_1, \ldots, w_{n-2}, v_1, v_2$ של $V$. נסמן

$$U_1 = \operatorname{Span}\{w_1, \ldots, w_{n-2}, v_1\}$$
$$U_2 = \operatorname{Span}\{w_1, \ldots, w_{n-2}, v_2\}$$

ונטען כי $U_1$ ו-$U_2$ הם על־המישורים הנדרשים.
אכן, הקבוצה $w_1, \ldots, w_{n-2}, v_1$ היא בת"ל כתת־קבוצה של בסיס, וכן היא פורשת את $U_1$ לפי ההגדרה, לכן $\dim U_1 = n-1$. בדומה $\dim U_2 = n-1$.
נטען כי $U_1 \neq U_2$. אכן, $v_2 \in U_2$, אבל $v_2 \notin U_1$ – שהרי הקבוצה $w_1, \ldots, w_{n-2}, v_1, v_2$ בת"ל, ולכן אין בה וקטור שניתן להביע כצירוף של הווקטורים האחרים.
ודאי ש-$W \subseteq U_1 \cap U_2$. מהסעיף הראשון, נקבל $\dim(U_1 \cap U_2) = n-2 = \dim W$, ולכן מהכלה ושוויון מימדים נקבל $W = U_1 \cap U_2$, כנדרש.

ג. הפרכה. אפשר למשל לבחור $V = \mathbb{R}^3$,

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

אלו שלושה תת־מרחבים ממימד 2 מעל $\mathbb{R}$, לכן שלושתם על־מישורים. כמו כן, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1 \cap U_2 \cap U_3$, לכן לא ייתכן $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 0$.

**שאלה 5.** (10 נק' לכל סעיף) יהי $V$ מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{R}$, ותהי $T\colon V \to V$ העתקה לינארית. לאורך השאלה נסמן $T^2 = T \circ T$.

א. נניח ש-$\dim V = 2$. הוכיחו כי $T^2 + I = 0$ אם ורק אם קיים בסיס סדור $B$ של $V$ שעבורו $[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ב. נניח ש-$\dim V = 3$. הוכיחו כי לא ייתכן ש-$T^2 + I = 0$.
כלומר: עליכם להוכיח שאם $\dim V = 3$ אז לא קיימת העתקה לינארית $T\colon V \to V$ שעבורה $T^2 + I = 0$.

פתרון.

א. $\boxed{\Leftarrow}$ נתחיל מניחוש מושכל: נניח ש-$\{v_1, v_2\}$ בסיס כזה. מה זה אומר? לפי הנוסחה לחישוב מטריצה מייצגת,

$$[Tv_1]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad [Tv_2]_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $Tv_1 = v_2$ ו-$Tv_2 = -v_1$. נשים לב ששני התנאים שקולים כי $T^2 + I = 0$. זה מספר לנו איך לבחור את הבסיס $B$.

כעת לתשובה: יהי $0 \neq v \in V$, ונגדיר $B = \{v, Tv\}$. נטען כי הקבוצה $B$ היא הבסיס הסדור הדרוש.

ראשית, נוכיח ש-$B$ בסיס של $V$. נוכיח ש-$B$ בת"ל: יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha v + \beta T v = 0.$$

נניח בשלילה ש-$\beta \neq 0$. לכן $Tv = -\alpha\beta^{-1}v$. נפעיל $T$ על שני האגפים ונקבל

$$T^2 v = T(-\alpha\beta^{-1}v)$$

כלומר

$$-v = -\alpha\beta^{-1}Tv = \alpha^2\beta^{-2}v.$$

כיוון ש-$v \neq 0$, בהכרח $\alpha^2\beta^{-2} = -1$, וזו סתירה כי אין למשוואה הזו פתרונות ממשיים. לכן $\beta = 0$, ומכאן $\alpha v = 0$ – כלומר $\alpha = 0$.

הראינו ש-$B$ בת"ל, וכיוון ש-$|B| = 2 = \dim V$ נסיק ש-$B$ בסיס של $V$.

כעת, החישוב של המטריצה המייצגת הוא ישיר:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} [Tv]_B & [TTv]_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [Tv]_B & [-v]_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

כנדרש.

$\boxed{\Rightarrow}$ נניח שקיים בסיס סדור $B$ שעבורו

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

נשים לב כי

$$[T^2 + I]_B^B = [T^2]_B^B + [I]_B^B = \left([T]_B^B\right)^2 + I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

לכן $T^2 + I = 0$.

ב. נניח בשלילה שקיימת העתקה כזו.

יהי $0 \neq v \in V$. בדיוק עם אותה הוכחה כמו בסעיף הקודם, הווקטורים $v, Tv$ בת"ל. נשלים אותם לבסיס $B = \{v, Tv, w\}$ של $V$. כעת $Tw \in V$, לכן קיימים $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$Tw = \alpha v + \beta Tv + \gamma w.$$

לכן, לפי הנוסחה לחישוב מטריצה מייצגת,

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

לכן

$$[T^2 + I]_B^B = \left([T]_B^B\right)^2 + [I]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}^2 + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma - \beta \\ 0 & 0 & \alpha + \beta\gamma \\ 0 & 0 & \gamma^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

מהנתון $T^2 + I = 0$ נסיק כי המטריצה הזו היא מטריצת אפסים; בפרט $\gamma^2 + 1 = 0$. אבל זו סתירה, כי אין למשוואה הזו פתרון ממשי. לכן לא קיימת העתקה $T$ כזו.