

פתרון שאלות תרגול בחדו"א 2

רן דותן

קובץ זה נועד לספק שאלות תרגול לפי נושאים לקורס חדו"א 2 המתאים להנדסה ולתכנית אודיסאה. השאלות לקוחות מתוך מבחנים ותרגולים שונים המופיעים ב-Math-Wiki, תרגילים מתוך ההרצאות של ד"ר ארז שיינר ושאלות לא פתורות מתוך ספרו הנהדר של ד"ר סמי זעפרני.

1 טורים

תרגיל 1. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס בתנאי/בהחלט/מתבדר.

פתרון 1. ראשית נשים לב כי אכן הסדרה הכללית $(-1)^n \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ שאופת ל-0 ולכן נוכל להתקדם לשלב הבא. נבדוק את ההתכנסות של טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$. נשים לב ראשית שהסדרה $a_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ היא סדרה חיובית תמיד.

נעשה את מבחן ההשוואה הגבולי עם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$$

ולכן הטורים חברים. מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס – גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס. והטור המקורי מתכנס בהחלט.

תרגיל 2. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ מתכנס בתנאי/בהחלט/מתבדר.

פתרון 2. נראה כי לפי סדרי גודל הסדרה $\frac{\ln(n)}{n}$ שאופת ל-0 ולכן גם הסדרה $(-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ (סדרה חסומה כפול סדרה אפסה שואפת לאפס) ולכן נוכל להתקדם לשלב הבא.

נרצה לבדוק את ההתכנסות של טור הערכים המוחלטים $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n}$ (קל לראות כי $\ln(n) > 0$ ולכן גם $\frac{\ln(n)}{n} > 0$). נראה כי החל מ- $n = 3$ מתקיים כי $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ ולכן נסיק כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. ולכן לפי מבחן ההשוואה, הטור המקורי לא מתכנס בהחלט.

כעת נבדוק אם הוא מתכנס בתנאי. נעשה זאת בעזרת לייבניץ.

בשביל לייבניץ אנחנו קודם כל צריכים להראות כי הסדרה $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$ מונוטונית ושואפת ל-0 (למרות שהאיברים הראשוניים שליליים, החל מהאיבר ה-3 הסדרה חיובית, ואנחנו יודעים שכמות סופית של איברים לא משפיעה על התכנסות הטור). נוכיח את הטענות הללו בעזרת חקירת פונקציות.

נגדיר

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$$

צ"ל להוכיח כי עבור $x \in [1, \infty)$ מתקיים כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

נראה כי לפי סדרי גודל מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

ולכן אם נציב $x = n$ נקבל כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$.
 כעת עלינו להוכיח גם כי f יורדת בתחום.
 נגזור:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$$

נשים לב כי עבור $x > e$ מתקיים כי

$$\ln(x) > 1$$

ולכן

$$\frac{1 - \ln(x)}{x^2} < 0$$

ולכן נסיק שבתחום זה הפונקציה יורדת.
 ולכן עבור $n > 3 > e$ נקבל כי a_n מונוטונית יורדת. ולכן לפי לייבניץ, הטור $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ מתכנס.
 וכפי שאמרנו קודם, מכיוון שכמות סופית של איברים לא משפיעה על התכנסות הטור, נסיק גם כי $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ מתכנס.
 ובסה"כ נסיק כי טור זה מתכנס בתנאי.

תרגיל 3. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n)$ מתכנס בתנאי/בהחלט/מתבדר.

פתרון 3. ראשית עלינו לבדוק אם הסדרה $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$ שואפת ל-0.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 1} - n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n^2 + 1} + n}_{\rightarrow \infty}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ולכן נוכל להתקדם לשלב הבא.

נוכל לפתור את השאלה הזו בכמה דרכים. הדרך שהכי קופצת היא מבחן ההשוואה הגבולי.

ניקח את הסדרה $b_n = \frac{1}{n}$, אנחנו רוצים לחשב את הגבול של $\frac{a_n}{b_n}$.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\frac{1}{n}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{n^2+1} - n \right) \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(\sqrt{n^2+1} - n \right) \left(\sqrt{n^2+1} + n \right)}{\sqrt{n^2+1} + n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(n^2 + 1 - n^2 \right)}{\sqrt{n^2+1} + n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1} + n} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)} \\&= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \\&= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ולכן מכיוון ש- $0 < \frac{1}{2} < \infty$ נסיק כי הטורים חברים. ומכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n)$ מתבדר.

תרגיל 4. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(e^n)}{\sqrt{n^3}}$ מתכנס בתנאי/בהחלט/מתבדר.

פתרון 4. ראשית עלינו לבדוק האם $\frac{\sin(e^n)}{\sqrt{n^3}} \rightarrow 0$? נראה כי מכיוון ש- $-1 \leq \sin(e^n) \leq 1$ וכן כי $\sqrt{n^3} \rightarrow \infty$ נקבל כי גבול הסדרה הוא אכן 0 (חסומה כפול אפסה/חסומה חלקי אינסוף). נבדוק את התכנסות טור הערכים המוחלטים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(e^n)}{\sqrt{n^3}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(e^n)|}{\sqrt{n^3}}$$

נראה כי $|\sin(e^n)| \leq 1$ ולכן

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(e^n)|}{\sqrt{n^3}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

ראינו בהראצה/תרגול/מקור מידע אמין לחדו"א כי הטור ההרמוני המוכלל $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס אם ורק אם $p > 1$. ומכיוון ש- $\frac{3}{2} > 1$ נסיק כי הטור הימני מתכנס. ולכן לפי מבחן ההשוואה הטור השמאלי גם מתכנס. ולכן הטור מתכנס בהחלט.

תרגיל 5. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ מתכנס בתנאי/בהחלט/מתבדר.

פתרון 5. נבדוק האם $\arctan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \left\{ \arctan\left(\frac{\text{hasuma}}{\infty}\right) \right\} = \arctan(0) = 0$$

נבדוק את התכנסות טור הערכים המוחלטים. נשים לב כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \arctan \left(\frac{(-1)^n}{n} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \arctan \left(\frac{1}{n} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \arctan \left(\frac{1}{n} \right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{1}{n} \right)$$

כעת, נבדוק האם הטור מתכנס לפי מבחן ההשוואה הגבולי עם הסדרה $b_n = \frac{1}{n}$, כאשר $a_n = \arctan \left(\frac{1}{n} \right)$. לא נחשב את הגבול מיד, קודם נחשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\}, L'Hopital \left\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2+1} = 1$$

ולכן קל לוודא כי הגבול הוא:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctan \left(\frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \underbrace{=}_{\text{according to the calculation above}} 1$$

ולכן, מכיוון ש $0 < 1 < \infty$ נקבל כי הטורים חברים. ומכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, נסיק כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{1}{n} \right)$ מתבדר.

ולכן הטור המקורי אינו מתכנס בהחלט. נותר לנו לבדוק אם הוא מתכנס בתנאי או מתבדר. נעשה זאת בעזרת מבחן לייבניץ. ראשית עלינו להוכיח כי הסדרה $\arctan \left(\frac{1}{n} \right)$ שואפת לאפס (בעיקרון כבר הראינו את זה בערך למעלה אך למה לא שוב?).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \left(\frac{1}{n} \right) = \arctan(0) = 0$$

וכעת עלינו להוכיח כי הסדרה מונוטונית יורדת. נעשה זאת בעזרת חקר פונקציות! נגדיר

$$f(x) = \arctan \left(\frac{1}{x} \right)$$

צ"ל כי f עולה בתחום $x \in [1, \infty)$. נגזור

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2 + 1} = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

נשים לב כי לכל x בתחום מתקיים ש

$$f'(x) < 0$$

ולכן הפונקציה יורדת בכל התחום.

ולכן לכל n נקבל כי הסדרה $\arctan \left(\frac{1}{n} \right)$ מונוטונית יורדת בכל התחום.

ולכן לפי מבחן לייבניץ, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \left(\frac{(-1)^n}{n} \right)$ מתכנס.

סה"כ הטור המקורי מתכנס בתנאי.

תרגיל 6. קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$ מתכנס בתנאי/בהחלט/מתבדר.

פתרון 6. בכדי שהטור יתכנס, צריך שיתקיים $(-1)^n (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \rightarrow 0$. נחשב את הגבול:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)(\sqrt{n^2 + n + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{n^2 + n + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{n + 1}{\sqrt{n^2 + n + 1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{(1 + \frac{1}{n})}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{1 + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

הסדרה היא רצף האיברים $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$ ואינה שואפת לאפס, ולכן הטור מתבדר.

תרגיל 7. (מתוך בוחן 2023 לאודיסאה) קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ מתכנס בתנאי/בהחלט/מתבדר.

פתרון 7. ראשית נבדוק האם הסדרה $\frac{\sin(n)}{n^2}$ שואפת לאפס.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n^2} = \left\{ -1 \leq \sin(n) \leq 1, \frac{\text{hasuma}}{\infty} = 0 \right\} = 0$$

נבדוק את התכנסות סדרת הערכים המוחלטים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin(n)}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2}$$

נשים לב כי $\frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$. מכיון ש $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, נסיק לפי מבחן ההשוואה הראשון כי גם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2}$ מתכנס.

סה"כ הטור מתכנס בהחלט.

תרגיל 8. (מתוך בוחן 2023 לאודיסאה) קבעו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ מתכנס בתנאי/בהחלט/מתבדר.

פתרון 8. נבדוק קודם אם $(-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \rightarrow 0$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{n(1 + \frac{2}{n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(-1)^n}_{\text{hasuma}} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{2}{n}}}_{\rightarrow 0} = 0$$

נבדוק את התכנסות סדרת הערכים המוחלטים

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$$

נשים לב כי החל מ $n > 2$ מתקיים

$$\frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \geq \frac{\sqrt{n}}{n+2} \geq \frac{\sqrt{n}}{n+n} = \frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ לא מתכנס, נסיק לפני מבחן ההשוואה הראשון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ שללנו את האפשרות שהטור המקורי יתכנס בהחלט. נשאר לבדוק אם הוא מתבדר או מתכנס בתנאי. נבדוק בעזרת לייבניץ. קל לראות כי $a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} > 0$. אנחנו צריכים להוכיח כי $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ וגם a_n מונוטונית יורדת. הראנו מקודם כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}}{1 + \frac{2}{n}} = 0$$

כעת, צ"ל שהסדרה מונוטונית יורדת. נעשה את זה בעזרת חקירת פונקציות.

נגדיר $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{2+x}$ ואנחנו צריכים להוכיח כי f יורדת בתחום $[1, \infty)$. נגזור

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}} \cdot (x+2) + 1 \cdot \sqrt{x+1}}{(2+x)^2} = \frac{2+x-2(x+1)}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}} = \frac{-x}{2(x+2)^2\sqrt{x+1}}$$

נקבל ש $f'(x) \leq 0$ בתחום שבחרנו. ולכן הפונקציה יורדת בתחום. אם נציב $x = n$ נקבל כי הסדרה $\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$ מונוטונית יורדת. ולכן לפי מבחן לייבניץ, הטור המקורי מתכנס. סה"כ הטור מתכנס בתנאי.

תרגיל 9. יהי טור חיובי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, הוכיחו או הפריכו את הטענות הבעות:

- אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
- אם לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים כי $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרון 9. סעיף א

הוכחה. תהי סדרה חיובית a_n המקיימת $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$. צ"ל כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר. מכיוון שהסדרה חיובית נדע שמתקיים

$$a_n \geq 0$$

כמו כן, לפי הנתון ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ נסיק כי $a_n \neq 0$ (אסור למכנה להתאפס). ולכן נקבל כי

$$a_n > 0$$

ניקח את האיבר a_1

$$a_1 > 0$$

בנוסף, נסיק מהנתון כי

$$a_{n+1} \geq a_n$$

ולכן הסדרה מונוטונית עולה. מכך נסיק כי גבול הסדרה גדול או שווה לאיבר הראשון a_1 .
ולכן

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq a_1 > 0$$

ולכן גבול הסדרה אינו אפס. ולכן הסדרה מתבדרת.

מ.ש.ל

סעיף ב

הפרכה:

ניקח את הסדרה

$$a_n = \frac{1}{n}$$

קל לראות כי a_n סדרה חיובית.

נשים לב כי מתקיים

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \leq 1$$

קיבלנו ש $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ אך אנחנו יודעים שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר.

למעשה קיימות הרבה סדרות פשוטות יותר המפריכות את הטענה. לדוגמא, כל סדרה קבועה חיובית.

תרגיל 10. תהי סדרה אי שלילית $0 \leq a_n$. הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס.

פתרון 10. זוהי טענת אם ורק אם, ולכן עלינו להוכיח את שני הכיוונים.

הוכחה. בכיוון הראשון – נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס וצ"ל כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס. נשים לב כי מכיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס כי $a_n \rightarrow 0$. כעת עלינו להוכיח כי $\frac{a_n}{a_n+1} \rightarrow 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{a_n}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{a_n + 1}_{\rightarrow 1}} = 0$$

הסדרה שואפת לאפס ונמשיך בהוכחה.

נשים לב כי מכיוון ש $a_n \geq 0$ כי

$$\frac{a_n}{a_n + 1} \leq a_n$$

ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס.
 בכיוון השני נניח כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס וצ"ל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
 נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי. עלינו לחשב את הגבול של $\frac{a_n+1}{a_n}$. אך לפני כן, נשים לב כי

$$\frac{a_n}{a_n + 1} = \frac{a_n + 1 - 1}{a_n + 1} = 1 - \frac{1}{a_n + 1}$$

ולכן

$$\frac{1}{a_n + 1} = 1 - \frac{a_n}{a_n + 1}$$

ומכיוון שנתון כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{a_n+1}$ מתכנס, נדע כי $\frac{a_n}{a_n+1} \rightarrow 0$ ולכן

$$\frac{1}{a_n + 1} \rightarrow 1 - 0 = 1$$

כעת נחשב את גבול המנה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_n}{a_n+1}}{\frac{a_n}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n + 1} \underbrace{=}_{\text{according to the calculation above}} 1$$

מכיוון ש $0 < 1 < \infty$ נסיק לפי מבחן ההשוואה הגבולי כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
 הוכחנו את שני הכיוונים של הטענה.

מ.ש.ל

□

תרגיל 11. (מתוך ספרו הנפלא של סמי זעפרני) תהי סדרה a_n חסומה, הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ מתכנס.

פתרון 11.

הוכחה. נוכיח כי הטור מתכנס בהחלט, ולכן בוודאי מתכנס.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^2}$$

נדע שמכיוון ש a_n חסומה כי קיים M כך ש

$$|a_n| \leq M$$

וכן

$$\left| \frac{a_n}{n^2} \right| = \frac{|a_n|}{n^2} \leq M \cdot \frac{1}{n^2}$$

נשים לב כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2} = M \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס, ולכן לפי מבחן ההשוואה הראשון, נסיק כי גם הטור השמאלי מתכנס.
 כלומר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{a_n}{n^2} \right|$ מתכנס ולכן נסיק כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2}$ מתכנס בהחלט (ולכן בפרט מתכנס). □

2 סדרות וטורי פונקציות

תרגיל 12. קבעו האם סדרת הפונקציות $f_n(x) = (\ln(x))^n$ מתכנסת במידה שווה בתחום $A = (1, e)$.

פתרון 12. ראשית נחשב את פונקצית הגבול בתחום.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(x))^n = 0$$

כעת נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_A |f_n(x) - f(x)| = \sup_{1 < x < e} |(\ln(x))^n| = 1$$

גבול סדרת החסמים אינו 0 ולכן סדרה הפונקציות לא מתכנסת במ"ש בתחום.

תרגיל 13. קבעו האם סדרת הפונקציות $f_n(x) = (\ln(x))^n$ מתכנסת במידה שווה בתחום $A = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 1\right)$.

פתרון 13. נחשב את פונקצית הגבול בתחום.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(x))^n = 0$$

נחשב את סדרת החסמים.

$$d_n = \sup_A |f_n(x) - f(x)| = \sup_{\frac{1}{\sqrt{e}} < x < 1} |(\ln(x))^n| = \frac{1}{2^n}$$

החסם הוא בגלל ש $(\ln(x))^n$ היא פונקציה מונוטונית יורדת וכן הגבול בקצה התחום הוא $\frac{1}{2^n}$.
נחשב את גבול סדרת החסמים.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

גבול סדרת החסמים הוא אכן 0 ולכן סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש בתחום.

תרגיל 14. תהי סדרת פונקציות $f_n(x)$ המתכנסת בכל $\mathbb{R}$ לפונקציית הגבול $f(x)$, כל שלכל n הפונקציה $f_n(x)$ מונוטונית עולה ממש ב $\mathbb{R}$. הוכיחו/הפריכו כי $f(x)$ מונוטונית עולה ב $\mathbb{R}$.

פתרון 14. נוכיח את הטענה.

הוכחה. יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש $x_1 < x_2$. לפי הנתון כי כל פונקציה $f_n(x)$ מונוטונית עולה ממש, מתקיים כי

$$f_n(x_1) < f_n(x_2)$$

נשאיף את שני הצדדים ונקבל כי

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_1) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_2)$$

ומכיון ש $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ מתקיים כי

$$f(x_1) \leq f(x_2)$$

□ ולכן לפי הגדרה, הפונקציה f מונוטונית עולה בכל $\mathbb{R}$. עבור סדרת הפונקציות $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$

תרגיל 15. נביט בסדרת הפונקציות $f_n(x) = x^n - x^{2n}$.

א. קבעו האם סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש בקטע $[0, 1]$.

ב. קבעו האם סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש בקטע $[0, \frac{1}{2}]$.

פתרון 15. נפתור את סעיף א:

נחשב את פונקצית הגבול בתחום.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n - x^{2n} = \begin{cases} 0 - 0 = 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 - 1 = 0 & x = 1 \end{cases} = 0$$

נחשב את סדרת החסמים

$$d_n = \sup_{[0,1]} |x^n - x^{2n}|$$

מכיון שבתחום מתקיים כי $x^n \geq (x^n)^2 = x^{2n}$ ולכן $x^n - x^{2n} \geq 0$ ולכן

$$d_n = \sup_{[0,1]} x^n - x^{2n}$$

נפתור בעזרת חקירת פונקציות, אנחנו רוצים למצוא את המקסימום של הפונקציה $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ נגזור

$$f'_n(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1} = nx^{n-1}(1 - 2x^n)$$

מכיון שהפונקציה גזירה ורציפה אזי המינימום והמקסימום מתקבלים בקצוות הקטע או בנקודות בהן הנגזרת מתאפסת. נחשב מתי הנגזרת מתאפסת

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

נחשב את הערכים בכל אחת מהנקודות

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$$

ולכן המקסימום של הפונקציה הוא $\frac{1}{4}$ ולכן

$$d_n = \sup_{[0,1]} |x^n - x^{2n}| = \frac{1}{4} \neq 0$$

ולכן אין התכנסות במ"ש בקטע.

פתרון סעיף ב

חישבנו כבר את פונקציה הגבול בקטע זה $([0, \frac{1}{2}] \subseteq [0, 1])$

$$f(x) = 0$$

נחשב את סדרת החסמים בקטע

$$d_n = \sup_{[0, \frac{1}{2}]} |x^n - x^{2n}| = \sup_{[0, \frac{1}{2}]} x^n - x^{2n}$$

כמו מקודם, חקרנו את הפונקציה $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ והסקנו כי הנקודות החשודות למקסימום כן הנקודות המאפסות את הנגזרת וקצוות הקטע.

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2}$$

$$x_3 = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$$

אך נשים לב כי $\frac{1}{2} < \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ ולכן הנקודה בכלל לא בתחום! ולכן נקודות הקיצון מתקבלות הקצוות הקטע בלבד.

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n}$$

מכיוון ש $\frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{4^n}$ אזי $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \geq 0$ ולכן המקסימום של הפונקציה הוא הנקודה הזו.

$$d_n = \sup_{[0, \frac{1}{2}]} |x^n - x^{2n}| = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} \rightarrow 0 - 0 = 0$$

ולכן יש התכנסות במ"ש בקטע.

תרגיל 16. נביט בטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $f(x) =$

א. חשבו את תחום ההתכנסות של הטור.

ב. חשבו את $f\left(\frac{1}{2}\right)$.

פתרון 16. פתרון סעיף א

נסמן $a_n = \frac{1}{n}$. אנחנו יודעים כי הגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ מתקיים אזי רדיוס ההתכנסות הוא הגבול.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

ולכן רדיוס ההתכנסות הוא

$$R = 1$$

כעת עלינו לבדוק את הטור מתכנס בקצוות הקטע $[0 - 1, 0 + 1]$.

עבור $x = 1$ אנחנו מקבלים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

טור זה אינו מתכנס! ולכן אין התכנסות בנקודה.

עבור $x = -1$ אנחנו מקבלים

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

נדע כי $\frac{1}{n}$ היא סדרה מונוטונית יורדת השואפת לאפס. ולכן לפי מבחן לייבניץ, הטור מתכנס ולכן יש התכנסות בנקודה $x = -1$.

לכן תחום ההתכנסות הינו

$$[-1, 1)$$

פתרון סעיף ב

עלינו לחשב את $f\left(\frac{1}{2}\right)$. כלומר עלינו למצוא לאן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}$ מתכנס.

נבצע טריק חביב! נסתכל על הטור ההנדסי

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

אנחנו יודעים בתחום $(-1, 1)$ הטור מתכנס ל

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

נאסכם (לבצע אינטגרציה אבל בעברית יפה) $\int_0^{\frac{1}{2}}$ את שני האגפים (נוכל לעשות זאת כי הטור מתכנס במ"ש בקטע זה)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x} dx \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^n dx \right) &= [-\ln |1-x|]_0^{\frac{1}{2}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} &= [-\ln |1-x|]_0^{\frac{1}{2}} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{n+1} &= -\ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n}}_{f\left(\frac{1}{2}\right)} &= -\ln\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\boxed{f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2)}$$

תרגיל 17. נביט בטור הפונקציות $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n x^2}$.
 א. הוכיחו כי $f(x)$ פונקציה רציפה בכל $(0, \infty)$.
 ב. חשבו את $f(x)$.

פתרון 17. במקרה הזה יהיה לנו יותר נוח לפתור את סעיף ב ולאחר מכן נפתור את סעיף א.
פתרון סעיף ב

נביט הטור ההנדסי המתכנס בתחום $(-1, 1)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

נגזור את שני האגפים (מותר לנו)

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

נכפול ב x

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$$

נציב כעת $x = e^{-x^2}$, מותר לנו מכיוון ש $-1 < 0 < e^{-x^2} < 1$ וכן $e^{-x^2} < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n x^2} = \frac{e^{-x^2}}{(1 - e^{-x^2})^2}$$

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{(1 - e^{-x^2})^2}$$

פתרון סעיף א

מצאנו את הפונקציה אליה מתכנס הטור. כעת עלינו להוכיח כי היא רציפה בתחום $(0, \infty)$. מהן הנקודות החשודות? הנקודות בהן המכנה מתאפס.

$$1 - e^{-x_0^2} = 0$$

$$e^{-x_0^2} = 1$$

$$x_0 = 0$$

אבל נקודה זו אינה בתחום!

$$0 \notin (0, \infty)$$

ולכן אין נקודות חשודות.

ולכן הפונקציה רציפה.

מ.ש.ל

תרגיל 18. נביט בטור הפונקציות $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$.

א. הוכיחו כי $f(x)$ פונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$.

ב. הוכיחו כי f גזירה בכל $\mathbb{R}$ ומתקיים כי $f'(0) = 0$.

פתרון 18. נפתור את סעיף א.

הוכחה. נשים לב כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי

$$\left| \frac{\cos(nx)}{n^3} \right| = \frac{|\cos(nx)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$$

$\Downarrow$

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{\cos(nx)}{n^3} \right| = \frac{1}{n^3} \rightarrow 0$$

ולכן לפי מבחן M של ויירשטראס נקבל כי טור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ מתכנס במ"ש בכל הממשיים.

ולכן נסיק כי לכל n מתקיים כי הפונקציה $\frac{\cos(nx)}{n^3}$ רציפה. ומכיוון שהטור ות מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$, ולכן נסיק כי נוכל לגזור

כל איבר. ונראה כי

$$\left| \frac{d}{dx} \frac{\cos(nx)}{n^3} \right| = \frac{|-n \sin(nx)|}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$$

↓

$$\sup_{\mathbb{R}} \left| \frac{\cos(nx)}{n^3} \right| = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0$$

□

ולכן נסיק כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}$

תרגיל 19. נביט בפונקציה $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

א. מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הביעו את $f(-\frac{1}{3})$ באמצעות פונקציות אלמנטריות.

פתרון 19. פתרון סעיף א

כדי למצוא את תחום ההתכנסות של הטור.

נעשה זאת בעזרת חישוב גבול המנה:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n+1} = 1$$

ולכן

$$R = 1$$

כעת אנחנו יודעים כי הטור מתכנס ב $(-1, 1)$. נבדוק מה מתרחש בקצוות.

עבור $x = -1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

זהו טור לייבניץ, נשים לב כי הסדרה $\frac{1}{n+1}$ היא חיובית, מונוטונית ושואפת ל 0. ולכן הטור אכן מתכנס.

עבור $x = 1$ נקבל את הטור

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

טור זה מתבדר.

סה"כ תחום ההתכנסות הוא $[-1, 1)$.

פתרון סעיף ב

ראשית עלינו למצוא לאיזו פונקציה הטור מתכנס.

ניקח טור ידוע המתכנס בתחום $(-1, 1)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

נבצע אינטגרציה (מותר לנו)

$$-\ln|1-x| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

נחלק ב- x .

$$-\frac{\ln|1-x|}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = f(x)$$

נשים לב כי מותר לנו לחלק x רק עבור $x \neq 0$, אנחנו יכולים להציב ולבדוק מה קורה כאשר $x = 0$ אך בכל מקרה ביקשו ממנו לחשב את ערך הפונקציה ב- $x = -\frac{1}{3} \neq 0$.
 כעת נציב $x = -\frac{1}{3}$

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{\ln\left|\frac{4}{3}\right|}{-\frac{1}{3}} = 3 \ln\left|\frac{4}{3}\right|$$

תרגיל 20. נביט בסדרת הפונקציות $f_n(x) = e^{-nx}$

א. מצאו את תחום ההגדרה של פונקצית הגבול $f(x)$.

ב. קבעו והוכיחו אם סדרת הפונקציות מתכנסת ב- $[0, 1]$ בתחום $[0, 1]$.

פתרון 20. פתרון סעיף א

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-nx} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{nx}} = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$$

ולכן הפונקציה פונקציה הגבול היא

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

פתרון סעיף ב

נשים לב כי פונקצית הגבול אינה רציפה בקצה הקטע, אך לכל n מתקיים כי $f_n(x) = e^{-nx}$ אכן רציפה לכל x . ולכן אין התכנסות ב- $[0, 1]$ בקטע.

תרגיל 21. נביט בפונקציה $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$

א. חשבו את ערך הנגזרת הבאה $f^{(61)}(0)$.

ב. הביעו את $f(1)$, $f(2)$ בעזרת פונקציות אלמנטריות.

פתרון 21. פתרון סעיף א

זהו טור חזקות. אנחנו יודעים כי המקדם עבור x^n הוא $\frac{f^n(0)}{n!}$. ולכן המקדם עבור האיבר x^{n+1} הוא $\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$.

ילינו למצוא מיהו n במקרה שלנו

$$n + 1 = 61$$

$$n = 60$$

ולכן

$$\frac{1}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}$$

$$\frac{1}{60!} = \frac{f^{(61)}(0)}{61!}$$

$$f^{(61)}(0) = \frac{61!}{60!}$$

$$f^{(61)}(0) = 61$$

פתרון סעיף ב

עלינו למצוא את הפונקציה אליה מתכנס הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$.
נתחיל מהטור הידוע (המתכנס לכל x)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} \right) + 1$$

נכפול ב x

$$xe^x = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{n!} \right) + x$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = xe^x - x$$

כעת, עלינו לחשב את $f(2), f(1)$

$$f(1) = 1 \cdot e^1 - 1 = e - 1$$

$$f(2) = 2e^2 - 2$$

תרגיל 22. נביט בפונקציה $f(x) = \arctan(x^2)$.

א. מצאו את טור הטיילור המתכנס ל $f(x)$.

ב. חשבו את $f^{(38)}(0)$.

פתרון 22. פתרון סעיף א

ננסה למצוא את הטור המתכנס ל $\arctan(x)$. לאחר מכן נוכל להציב את x^2 בטור ולמצוא את $\arctan(x^2)$. נשים לב כי

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

כעת נסתכל על הטור ההנדסי.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

נציב $-x^2$

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n$$

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

ולכן קיבלנו

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

נאסכם (נבצע אינטגרציה, לפי עדי מכנס) $\int_0^x$ על שני האגפים

$$\int_0^x \left(\frac{d}{dx} \arctan(x) \right) dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} dx$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n x^{2n} dx$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

וכעת נציב x^2 .

$$f(x) = \arctan(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{4n+2}$$

פתרון סעיף ב

עלינו לחשב את הנגזרת ה-38 של הפונקציה.

אנחנו יודעים כי המקדם של x^{38} בטור הטיילור הוא

$$\frac{f^{(38)}(0)}{38!}$$

כעת בטור שאנחנו מצאנו, אנחנו רוצים לדעת עבור איזה n נקבל את החזקה ה-38.

$$4n + 2 = 38$$

$$4n = 36$$

$$n = 9$$

ולכן

$$\frac{f^{(38)}(0)}{38!} = \frac{(-1)^9}{19}$$

$$\boxed{f^{(38)}(0) = -\frac{38!}{19}}$$

תרגיל 23. (מתוך ההרצאות של ארז שיינר) נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

חשבו את $f^{(11)}(0)$, $f^{(10)}(0)$.

פתרון 23. נמצא את טור החזקות המתכנס לפונקציה f .
נתחיל בטור הידוע

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

נציב x^2

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

נוציא את האיבר הראשון ונקבל

$$e^{x^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

↓

$$e^{x^2} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

כעת נרצה לחלק ב- x . עבור $x \neq 0$ נקבל

$$\frac{e^{x^2} - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}$$

ולכן

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}$$

עבור $x = 0$ נציב ונבדוק האם

$$f(0) \stackrel{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^{2n-1}}{n!}$$

$$0 = 0$$

ולכן סה"כ לכל x מתקיים $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}$.
כעת עלינו לחשב את הנגזרות. אנחנו יודעים כי לכל טור טיילור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ סביב 0 מתקיים כי המקדם של x^n הוא

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

וכן המקדם של x^{2n-1} הוא

$$a_{2n-1} = \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}$$

במקרה שלנו

$$\frac{1}{n!} = \frac{f^{(2n-1)}(0)}{(2n-1)!}$$

עבור $f^{(11)}(0)$ צריך למצוא עבור איזה n נקבל את המקדם של x^{10} .

$$2n - 1 = 11$$

$$n = 6$$

ולכן

$$\frac{1}{6!} = \frac{f^{(11)}(0)}{11!}$$

$$f^{(11)}(0) = \frac{11!}{6!}$$

עבור $f^{(10)}(0)$, נשים לב כי טור הטיילור שלנו מכיל חזקות אי זוגיות בלבד. ולכן המקדם של x^{10} הוא 0, ולכן נסיק כי

$$f^{(10)}(0) = 0$$

3 פונקציות בשני משתנים

תרגיל 24. תהי הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^5}{2y^{10} + 3x^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. האם הפונקציה רציפה ב $(0, 0)$?

ב. חשבו את $f_x(0, 0)$ ו $f_y(0, 0)$.

ג. האם הנגזרות החלקיות רציפות ב $(0, 0)$?

פתרון 24. פתרון סעיף א

עלינו לחשב את גבול הפונקציה בנקודה $(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^5}{2y^{10} + 3x^2} = \{x = t^5, y = t\} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{10}}{2t^{10} + 3t^{10}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 + 3} = \frac{1}{5} \neq 0 \end{aligned}$$

קיבלנו מסלול עבורו הגבול אינו 0.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) \neq f(0, 0)$$

ולכן הפונקציה אינה רציפה בנקודה.

פתרון סעיף ב

נחשב את הנגזרות החלקיות לפי הגדרתן:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h \cdot 0^5}{2 \cdot 0^{10} + 3h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h + 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot h^5}{2h^{10} + 3 \cdot 0^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

פתרון סעיף ג

אנחנו יודעים כי הנגזרות החלקיות f_x, f_y רציפות בנקודה אם ורק אם הפונקציה f דיפרנציאבילית בנקודה. נשים לב כי בסעיף א אמרנו כי הפונקציה אינה רציפה בנקודה $(0, 0)$ ולכן היא אינה דיפרנציאבילית, ולכן נסיק כי הנגזרות החלקיות אינן רציפות בנקודה $(0, 0)$.

תרגיל 25. תהי פונקציה דיפרנציאבילית ב $\mathbb{R}^2$ ומקיימת $f(x, x^2) = x^3 - 3x$

א. הוכיחו כי $f_x(-1, 1) = 2 \cdot f_y(-1, 1)$.

ב. נתון גם כי המישור המשיק לגרף בנקודה $z = f(x, y)$, בנקודה בה $(x, y) = (-1, 1)$,

מאונך למישור $3x - 2y + 8z + 10 = 0$. מצאו את משוואת מישור משיק זה.

פתרון 25. פתרון סעיף א

הוכחה. נגדיר

$$g(t) = f(t, t^2) = t^3 - 3t$$

נגזור לפי כלל השרשרת

$$g'(t) = f_x(t, t^2) \cdot 1 + f_y(t, t^2) \cdot 2t = 3t^2 - 3$$

$$f_x(t, t^2) + 2tf_y(t, t^2) = 3t^2 - 3$$

נציב $t = -1$

$$f_x(-1, 1) - 2f_y(-1, 1) = 3 - 3$$

$$f_x(-1, 1) = 2f_y(-1, 1)$$

□

מ.ש.ל

פתרון סעיף ב

אנחנו יודעים כי משוואת המשיק לפונקציה f הדיפרניאבילית בנקודה $(-1, 1)$ היא

$$z = f(-1, 1) + f_x(-1, 1)(x + 1) + f_y(-1, 1)(y - 1)$$

נשים לב כי

$$f(-1, 1) = (-1)^3 + 3 = 2$$

וכן לפי הסעיף הקודם נקבל

$$z = 2 + 2f_y(-1, 1)(x + 1) + f_y(-1, 1)(y - 1)$$

$$z = 2 + 2f_y(-1, 1)x + 2f_y(-1, 1) + f_y(-1, 1)y - f_y(-1, 1)$$

$$2f_y(-1, 1)x + f_y(-1, 1)y - z = -2 - f_y(-1, 1)$$

נתון לנו כי מישור זה מאונך למישור $3x - 2y + 8z = -10$ ולכן גם הנורמלים שלהם מאונכים, ולכן המכפלה הסקלרית שלהם היא 0.

$$(2f_y(-1, 1), f_y(-1, 1), -1) \cdot (3, -2, 8) = 0$$

$$6f_y(-1, 1) - 2f_y(-1, 1) - 8 = 0$$

$$f_y(-1, 1) = 2$$

↓

$$f_x(-1, 1) = 4$$

ולכן המישור הוא

$$4x + 2y - z = -2 - 2$$

$$4x + 2y - z = -4$$

תרגיל 26. תהי הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. האם הפונקציה רציפה ב $(0, 0)$?

ב. האם הפונקציה דיפרציאבילית ב $(0, 0)$?

פתרון 26. פתרון סעיף א

עלינו לחשב את הגבול $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x)$ ולקבוע האם הוא שווה ל $f(0, 0)$.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\ln(1+x^2+y^2)}{x^2+y^2} &= \{x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)\} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(1+r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta))}{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(1+r^2)}{r^2} = \{\text{known limit}\} = 1 \end{aligned}$$

אנחנו יודעים כי $f(0, 0) = 1$ ולכן קיבלנו כי $f(0, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ולכן הפונקציה רציפה בנקודה.

פתרון סעיף ב

כדי לקבוע האם הפונקציה דיפרציאבילית, עלינו לחשב את הגבול

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x+a, y+b) - f(x, y)}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{f_x(x, y) \cdot a + f_y(x, y) \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

נחשב את הנגזרות החלקיות

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h^2)}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-h}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h^2)}{h^2} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-h}{h} = 0$$

ולכן

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a,b) - f(0,0)}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \underbrace{\frac{f_x(0,0) \cdot a + f_y(0,0) \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}_{=0} = \lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{\ln(1+a^2+b^2)}{a^2+b^2} - 1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

נשים לב כי את הגבול במונה כבר חישובנו בסעיף א!

$$= \lim_{(a,b) \rightarrow (0,0)} \frac{1-1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 0$$

קיבלנו כי הגבול קיים וסופי ולכן הפונקציה דיפרנציאבילית.

הערה. נשים לב כי לא היינו מוכרחים לחשב את הגבול בשביל לקבוע האם הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה. ישנו משפט שאומר כי אם הנגזרות החלקיות של הפונקציה רציפות בנקודה, אזי הפונקציה דיפרנציאבילית בנקודה.

-
- תרגיל 27. הטמפרטורה בכל נקודה (x, y) במישור נתונה על ידי $f(x, y) = \frac{100}{x^2+y^2+1}$.
- א. מהי הצורה של קווי הגובה של f ?
- ב. מהי הנקודה החמה ביותר של המישור ומה הטמפרטורה בה?
- ג. מצאו את כיוון העליה הכי גדולה של הטמפרטורה בנקודה $(3, 2)$.

פתרון 27. פתרון סעיף א

קווי הגובה נתונים באופן הבא

$$\{(x, y) \mid f(x, y) = C\} = \left\{ (x, y) \mid \frac{100}{x^2 + y^2 + 1} = C \right\}$$

נבצע מעט שינויים על הביטוי

$$\frac{100}{x^2 + y^2 + 1} = C$$

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{100}{C}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{100}{C} - 1$$

ולכן קווי הקבחה הם

$$\left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 = \frac{100}{C} - 1 \right\}$$

ולכן מדובר במעגלים!!!!!!

תרגיל 28. (מתוך בוחן להנדסה) נטע-הנמלה (אני לא יודע מי זו נטע, אך אני כן מכיר את "מכנס הנמלון" ולכן הוא יהיה הגיבור של הסיפור), (מכנס הנמלון) מטייל על חוף הים, שהטמפרטורה בכל נקודה נמדדת על ידי הפונקציה הדיפרנציאבילית $f(x, y)$. עוד נתון כי $f_x(0, 0) = 1, f_y(0, 0) = 2$.

(אין קשר בין הסעיפים)

א. נתון כי נטע הנמלה נמצאת בנקודה $(0, 0)$. באיזו כיוון נטע צריכה ללכת על מנת להתחמם?
 ב. בסעיף זה נתון כי נטע מכנס הנמלון מטייל במסלול $(t-1, y(t))$ כאשר $y(t)$ פונקציה גזירה. חשבו את $y(1), y'(1)$ אם נתון כי הנקודה $(0, 0)$ הייתה הנקודה הכי חמה במסלול שנטע שמכנס עבר.

פתרון 28. פתרון סעיף א

הכיוון בו מכנס צריך ללכת או בכיוון הגרדיאנט של פונקציה – שהרי נותן את כיוון העלייה התלולה ביותר של הפונקציה.

$$\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$$

נציב את הנקודה $(0, 0)$.

$$\nabla f(0, 0) = (f_x(0, 0), f_y(0, 0))$$

מהנתון בשאלה נראה כי

$$\nabla f(0, 0) = (1, 2)$$

ולכן, מכנס/נטע צריכים ללכת בכיוון הוקטור $(1, 2)$.

פתרון סעיף ב

מהנתון בסעיף נסיק כי מכנס עבר בנקודה $(0, 0)$. ולכן מתקיים

$$(t_0 - 1, y(t_0)) = (0, 0)$$

מכך נסיק כי $t_0 - 1 = 0$ כלומר $t_0 = 1$. כמו כן נסיק כי

$$y(t_0) = 0$$

$$\boxed{y(1) = 0}$$

כעת נסמן ב- g את פונקציית הטמפרטורה במסלול שמכנס עבר.

$$g(t) = f(t-1, y(t))$$

מכיוון שנתון כי $(0, 0)$ היא הנקודה החמה ביותר שמכנס עבר בה. נסיק כי $t = 1$ מקסימום של הפונקציה $g(t)$. ולכן $g'(1) = 0$.

נחשב את הנגזרת בעזרת כלל השרשת.

$$g'(t) = 1 \cdot f_x(t-1, y(t)) + y'(t) \cdot f_y(t-1, y(t))$$

נציב $t = 1$

$$g'(1) = 1 \cdot f_x \left(0, \underbrace{y(1)}_0 \right) + y'(1) \cdot f_y \left(0, \underbrace{y(1)}_0 \right) = 0$$

$$\underbrace{f_x(0,0)}_1 + y'(1) \cdot \underbrace{f_y(0,0)}_2 = 0$$

$$1 + 2y'(1) = 0$$

$$\boxed{y'(1) = -\frac{1}{2}}$$

תרגיל 29. תהי $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית בעלת נגזרות חלקיות רציפות, ונגדיר את הפונקציה $h(t)$ להיות הנגזרת של f בכיוון $(-\sin(t), \cos(t))$ בנקודה $(\cos(t), \sin(t))$. חשבו את האינטגרל $\int_0^\pi h(t) dt$. הביעו את תשובתכם בעזרת הפונקציה f .

פתרון 29. ראשית עלינו לחשב את הנגזרת הכיוונית

$$h(t) = f'_v(\cos(t), \sin(t)) = \nabla f(\cos(t), \sin(t)) \cdot \frac{(-\sin(t), \cos(t))}{\|(-\sin(t), \cos(t))\|}$$

$$h(t) = (f_x(\cos(t), \sin(t)), f_y(\cos(t), \sin(t))) \cdot (-\sin(t), \cos(t))$$

$$h(t) = -\sin(t) \cdot f_x(\cos(t), \sin(t)) + \cos(t) \cdot f_y(\cos(t), \sin(t))$$

אך נשים לב כי זו פשוט הנגזרת לפי כלל השרשת של הפונקציה הקדומה $H(t) = f(\cos(t), \sin(t))$ ומכיוון ש

$$H(t) = \int h(t) dt$$

נדע כי

$$\int_0^\pi h(t) dt = [f(\cos(t), \sin(t))]_0^\pi = f(-1, 0) - f(1, 0)$$

תרגיל 30. נתונה פונקציה דיפרנציאבילית $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש $f(2t, t^2 - 3t) = 5t \forall t$. כמו כן נתון שהנגזרת הכיוונית של f בנקודה $(2, -2)$ בכיוון הוקטור $v = (3, 4)$ היא $\frac{13}{4}$. חשבו את $\nabla f(2, -2)$.

פתרון 30. נסמך $g(t) = f(2t, t^2 - 3t)$. אנחנו יודעים מהנתון כי $g(t) = 5t$. נגזור את הפונקציה לפי כלל השרשרת.

$$g'(t) = 2f_x(2t, t^2 - 3t) + (2t - 3)f_y(2t, t^2 - 3t) = 5$$

נציב $g'(t)$ את $t = 1$ ונקבל

$$2f_x(2, -2) - f_y(2, -2) = 5$$

$$f_y(2, -2) = 2f_x(2, -2) - 5$$

כמו כן אנחנו יודעים מהנתון כי

$$f'_v(2, -2) = \nabla f(2, -2) \cdot \frac{(3, 4)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{13}{5}$$

$$(f_x(2, -2), f_y(2, -2)) \cdot (3, 4) \cdot \frac{1}{5} = \frac{13}{5}$$

$$3f_x(2, -2) + 4f_y(2, -2) = 13$$

נציב את מה שגילינו $5 = 2f_x(2, -2) - f_y(2, -2)$

$$3f_x(2, -2) + 8f_x(2, -2) - 20 = 13$$

$$11f_x(2, -2) = 33$$

$$f_x(2, -2) = 3$$

$\Downarrow$

$$f_y(2, -2) = 2 \cdot 3 - 5 = 1$$

ולכן

$$\nabla f(2, -2) = (f_x(2, -2), f_y(2, -2))$$

$$\nabla f(2, -2) = (3, 1)$$

תרגיל 31. תהי $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית המקיימת לכל $x, y \in \mathbb{R}$ כי $f_x(x, y) = -f_y(x, y)$.
 א. הוכיחו כי הפונקציה $f(t, t)$ קבועה לכל $t \in \mathbb{R}$.
 ב. הוכיחו כי לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x - y, 0) = f(x, y)$ (רמז: הביטו ב $f(t, t + y - x)$).

פתרון 31. פתרון סעיף א

תנאי שקול לכך ש $f(t, t)$ קבועה, היא שנגזרת הפונקציה היא 0.
 נגדיר $g(t) = f(t, t)$. נגזור לפי כלל השרשרת.

$$g'(t) = f_x(t, t) \cdot 1 + f_y(t, t) \cdot 1$$

$$g'(t) = f_x(t, t) + f_y(t, t)$$

ניזכר כי נתון שלכל x, y מתקיים $f_x(x, y) = -f_y(x, y)$ ולכן

$$g'(t) = -f_y(x, y) + f_y(t, t) = 0$$

ולכן קיבלנו כי הנגזרת של $g(t) = f(t, t)$ היא 0. ולכן הפונקציה קבועה לכל t .
 מ.ש.ל.

פתרון סעיף ב

ניעזר ברמז. ונסמן

$$h(t) = f(t, t + y - x)$$

נציב בפונקציה $t = x - y$

$$h(x - y) = f(x - y, 0)$$

כמו כן נציב $t = 0$ ונקבל.

$$h(0) = f(0, y - x)$$

אנחנו רוצים להוכיח כי $f(x - y, 0) = f(0, y - x)$.

ולכן אנחנו בעצם רוצים להוכיח $h(0) = h(x - y)$.

נשמח להוכיח כי h היא פונקציה קבועה. נגזור (לפי כלל השרשרת).

$$h'(t) = 1 \cdot f_x(t, t + y - x) + 1 \cdot f_y(t, t + y - x)$$

כמו כן, מכיוון ש $-f_x(t, t + y - x) = f_y(t, t + y - x)$.

$$h'(t) = f_x(t, t + y - x) - f_x(t, t + y - x)$$

$$h'(t) = 0$$

ולכן h היא פונקציה קבועה, מה שאומר כי בפרט $h(0) = h(x - y)$. ולכן

$$f(x - y, 0) = f(0, y - x)$$

מ.ש.ל.

תרגיל 32. (מתוך ספרו של סמי זעפרני) הוכח כי הפונקציה $f(x, y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$ מקיימת את המשוואה

$$x \cdot f_x(x, y) + y \cdot f_y(x, y) = 2$$

פתרון 32. (העשרה - משוואה מסוג זה נקראת "מד"ח" - משוואה דיפרנציאלית חלקית. למעשה ישנו קורס שלם העוסק במשוואות כאלו.)

זוהי שאלה נחמדה וחביבה שמטרתה לתרגל חישוב נגזרות חלקיות. נחשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

$$f_x(x, y) = \frac{2x + y}{x^2 + xy + y^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{2y + x}{x^2 + 2y + y^2}$$

כעת נשים לב כי

$$\begin{aligned} x \cdot f_x(x, y) + y \cdot f_y(x, y) &= \frac{2x^2 + xy}{x^2 + xy + y^2} + \frac{2y^2 + yx}{x^2 + 2y + y^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2xy + 2y^2}{x^2 + 2y + y^2} \\ &= \frac{2(2x^2 + 2xy + 2y^2)}{2x^2 + 2xy + 2y^2} \end{aligned}$$

"חדוות הצמצום!". קיבלנו כי

$$x \cdot f_x(x, y) + y \cdot f_y(x, y) = 2$$

ולכן הראנו את הדרוש.

תרגיל 33. חשב את הנגזרת הכיוונית של הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

בנקודה $(0, 0)$ בכיוון הוקטור $\vec{v} = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ כאשר $0 \leq \theta < 2\pi$. (הביעו את תשובתכם בעזרת הזווית θ).

פתרון 33. היינו רוצים (ואף מאוד) להשתמש בנוסחה החביבה

$$f'_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

אבל בשביל זה צריך להתקיים כי f דיפרנציאבילית. נבדוק אם זה המצב.
ראשית נבדוק האם f רציפה בנקודה $(0, 0)$. עלינו לבדוק האם $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$.
אנחנו יודעים כי $f(0, 0) = 0$. ולכן עלינו לבדוק האם $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$.
נחשב את הגבול.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

נבחר את המסלול $x = t, y = t^2$.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \cdot t^2}{t^4 + t^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{2t^4} \\ &= \frac{1}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

לכן הפונקציה לא רציפה בנקודה! ולכן גם לא דיפרנציאבילית בנקודה! ולכן לא נוכל להשתמש בנוסחה לעיל!!
עלינו לחשב את הנגזרת הכיוונית בעזרת הגדרתה. זה קשה יותר – מהסיבה הפשוטה שארזי שינר לא סיפק את ההגדרה בדף הנוסחאות.

תזכורת: הנגזרת הכיוונית בנקודה (x_0, y_0) בכיוון הוקטור $\vec{v} = (a, b)$ מוגדרת באופן הבא

$$f_{\vec{v}}(x_0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + ta, y_0 + tb) - f(x_0, y_0)}{t\sqrt{a^2 + b^2}}$$

במקרה שלנו

$$\begin{aligned} f_{\vec{v}}(0, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t \cos(\theta), t \sin(\theta)) - f(0, 0)}{t\sqrt{a^2 + b^2}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{(t \cos(\theta))^2 \cdot t \sin(\theta)}{(t \cos(\theta))^4 + (t \sin(\theta))^2} - 0}{t\sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{t^3 \cos(\theta) \sin(\theta)}{t^4 \cos^4(\theta) + t^2 \sin^2(\theta)}}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{\underbrace{t^2 \cos^4(\theta) + \sin^2(\theta)}_{\rightarrow 0}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\theta) \sin(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \begin{cases} \cot(\theta) & \theta \neq 0, \pi \\ 0 & \theta = 0, \pi \end{cases} \end{aligned}$$

(לא כללנו מחזוריים נוספים של π בגלל התחום הנתון)

מצאנו את הנגזרת הכיוונית בנקודה.

4 אינטגרלים - כפולים, משולשים, קווים, משטחים

תרגיל 34. נתון התחום $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 2\}$ ונתונה הפונקציה $f(x, y) = e^{-y^2}$ חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f dx dy$.

פתרון 34. נחשב את האינטגרל.

$$\iint_D f dx dy = \int_0^2 \left(\int_0^y e^{-y^2} dx \right) dy$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_0^y e^{-y^2} dx = \left[x e^{-y^2} \right]_0^y = y e^{-y^2}$$

ולכן

$$\iint_D f dx dy = \int_0^2 y e^{-y^2} dy = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^2 -2y e^{-y^2} dy$$

נבצע שינוי משתנים $t = -y^2$ ולכן $dt = -2y dy$. כמו כן התחום $[0, 2]$ יומר לתחום $[-4, 0]$. ולכן

$$\iint_D f dx dy = -\frac{1}{2} \cdot \int_0^{-4} e^t dt = \frac{1}{2} \cdot \int_{-4}^0 e^t dt = \frac{1}{2} \cdot [e^t]_{-4}^0 = \boxed{\frac{1}{2} \cdot (1 - e^{-4})}$$

תרגיל 35. נתון התחום $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ ונתונה הפונקציה $f(x, y) = \frac{x^2}{1+y^2}$. חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f dx dy$.

פתרון 35. נחשב את האינטגרל.

$$\iint_D f dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 \frac{x^2}{1+y^2} dx \right) dy$$

נחשב את האינטגרל הפנימי.

$$\int_0^2 \frac{x^2}{1+y^2} dx = \left[\frac{x^3}{3(1+y^2)} \right]_0^2 = \frac{8}{3(1+y^2)}$$

ולכן

$$\iint_D f dx dy = \int_0^1 \frac{8}{3(1+y^2)} dy = \frac{8}{3} \cdot \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy = \frac{8}{3} [\arctan(y)]_0^1 = \frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{2\pi}{3}}$$

תרגיל 36. חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy$ על התחום $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y, 0 \leq y\}$

פתרון 36. ראשית עלינו לעבוד על התחום.

נשים לב כי

1. התחום $x^2 + y^2 \leq 4$ הוא מעגל חוסם שרדיוסו 2.

2. התחום $1 \leq x^2 + y^2$ מייצג מעגל חסום שרדיוסו 1.

3. התחום $0 \leq y$ מייצג כי התחום הוא ברביע הראשון והרביעי.

4. התחום $x \leq y$ מייצג כי אנחנו לוקחים את התחום מעל הישר $y = x$.

נעבור לקוארדינטות פולאריות .

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta)$$

מ-1,2 נסיק כי

$$1 \leq r \leq 2$$

מ-3,4 נסיק כי

$$\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$$

ולכן

$$D' = \left\{ (r, \theta) \mid 1 \leq r \leq 2, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi \right\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D f dx dy &= \iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} dx dy = \iint_{D'} \frac{r \cos(\theta) + r \sin(\theta)}{r^2 \cos^2(\theta) + r^2 \sin^2(\theta)} r dr d\theta = \iint_{D'} \frac{r \sin(\theta) + r \cos(\theta)}{r^2} \cdot r dr d\theta = \\ &= \iint_{D'} (\sin(\theta) + \cos(\theta)) dr d\theta = \int_1^2 \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin(\theta) + \cos(\theta)) d\theta \right) dr \end{aligned}$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin(\theta) + \cos(\theta)) d\theta = [-\cos(\theta) + \sin(\theta)]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} = -\cos(\pi) + \sin(\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

כעת

$$\iint_D f dx dy = \int_1^2 1 dr = 2 - 1 = \boxed{1}$$

תרגיל 37. חשב את הצפיפות של גוף $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 4, 1 \leq z \leq 3\}$ כאשר פונקציית המסה הנקודתית

היא $f(x, y, z) = xy + yz$.

פתרון 37. עלינו לחשב את האינטגרל המשולש של הפונקציה על V .

$$\iiint_V (xy + yz) dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_2^4 \left(\int_1^3 (xy + yz) dz \right) dy \right) dx$$

נחשב את האינטגרל הכי פנימי.

$$\int_1^3 (xy + yz) dz = \left[xyz + \frac{yz^2}{2} \right]_1^3 = 3xy + \frac{9y}{2} - xy - \frac{y}{2} = 2xy + 4y$$

כעת

$$\iiint_V (xy + yz) dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_2^4 2xy + 4y dy \right) dx$$

נחשב את האינטגרל הפנימי

$$\int_2^4 (2xy + 4y) dy = [xy^2 + 2y^2]_2^4 = 16x + 32 - 4x - 8 = 12x + 24$$

וכעת

$$\iiint_V (xy + yz) dx dy dz = \int_0^1 (12x + 24) dx = [6x^2 + 24x]_0^1 = \boxed{30}$$

תרגיל 38. חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) \arcsin \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$. כאשר D הוא התחום החסום על ידי: $y = x, y = \sqrt{3}x, x = 1, x = 4$.

פתרון 38. השימוש בפונקציה $\arcsin$ רומז לנו כי עלינו להחליף קואורדינטות. התחום הנתון D הוא:

$$D = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq x \leq 4, x \leq y \leq \sqrt{3}x \right\}$$

נבצע החלפת קואורדינטות.

$$x = r \cos(t), y = r \sin(t)$$

- הישר $y = x$ מתאים לזווית $t = \frac{\pi}{4}$
 - הישר $y = \sqrt{3}x$ מתאים לזווית $t = \frac{\pi}{3}$
 ולכן

$$\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$$

כמו, כן

$$1 \leq r \cos(t) \leq 4$$

$$\frac{1}{\cos(t)} \leq r \leq \frac{4}{\cos(t)}$$

ולכן

$$D' = \left\{ (r, t) \mid \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{3}, \frac{1}{\cos(t)} \leq r \leq \frac{4}{\cos(t)} \right\}$$

וכן

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) \arcsin \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) &= \iint_{D'} \left(\frac{r \cos(t)}{(r \cos(t))^2 + (r \sin(t))^2} \right) \arcsin \left(\frac{r \sin(t)}{\sqrt{(r \cos(t))^2 + (r \sin(t))^2}} \right) \cdot r dr dt \\ &= \iint_{D'} \frac{r \cos(t)}{r^2} \cdot \arcsin \left(\frac{r \sin(t)}{\sqrt{r^2}} \right) \cdot r dr dt \\ &= \iint_{D'} \cos(t) \cdot \arcsin(\sin(t)) \cdot dr dt \\ &= \iint_{D'} t \cdot \cos(t) dr dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{\frac{1}{\cos(t)}}^{\frac{4}{\cos(t)}} t \cos(t) dr \right) dt \end{aligned}$$

נחשב את האינטגרל הפנימי.

$$\int_{\frac{1}{\cos(t)}}^{\frac{4}{\cos(t)}} t \cos(t) dr = [t \cos(t) r]_{\frac{1}{\cos(t)}}^{\frac{4}{\cos(t)}} = \frac{4t \cos(t)}{\cos(t)} - \frac{t \cos(t)}{\cos(t)} = 4t - t = 3t$$

וכעת

$$\iint_D \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 3t dt = \left[\frac{3t^2}{2} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \boxed{\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{9} - \frac{\pi^2}{16} \right)}$$

תרגיל 39. נביט במשטח $M = \{(x, y, z) \mid z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \leq z \leq 1\}$ ונביט בשדה הוקטורי $\vec{G} = (1, 1, 1)$. חשבו את האינטגרל המשטחי מסוג שני $\iint_M \vec{G} \cdot \hat{n} dS$ כאשר הנורמל בעל רכיב z חיובי.

פתרון 39. נרצה להשתמש במשפט סטוקס.

נרצה למצוא $\vec{F}$ כך ש

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{G}$$

מכיוון שכך נקבל כי

$$\oint_C \text{rot}(\vec{F}) = \iint_M \vec{G} \cdot \hat{n} dS$$

הנורמל כלפי מעלה, ולכן השפה (שהיא מעגל היחידה) צריכה להיות נגד כיוון השעון.
נסמן

$$\vec{F} = (P, Q, R)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{F}) &= \nabla \times \vec{F} \\ &= \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{pmatrix} \\ &= (R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) \end{aligned}$$

אנחנו רוצים ש

$$(R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y) = (1, 1, 1)$$

נראה כי

$$R = y, Q = x, P = z$$

מספק לנו את הדרוש. ולכן

$$\vec{F} = (z, x, y)$$

כעת, פרמטריזציה של המשטח

$$\vec{r}(x, y, z) = (\cos(t), \sin(t), 0)$$

התחום

$$t \in [0, 2\pi]$$

ולכן

$$\begin{aligned} \iint_M \vec{G} \cdot \hat{n} dS &= \iint_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n} dS = \oint_C \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (0, \cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 0) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t) + 1}{2} dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2} \right]_0^{2\pi} = \boxed{\pi} \end{aligned}$$