

### פתרון תרגיל בית 3

#### שאלה 1

מצא פתרון כללי של המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll}
 , y'' - 9y' + 9y = 0 \text{ (ג)} & , 2y'' - 3y' + y = 0 \text{ (ב)} & , 6y'' - y' - y = 0 \text{ (א)} \\
 , y'' - 6y' + 9y = 0 \text{ (י)} & , 9y'' + 6y' + y = 0 \text{ (ה)} & , y'' - 2y' - 2y = 0 \text{ (ד)} \\
 , y'' + 5y' + 8y = 0 \text{ (ט)} & , y'' - 4y' + 8y = 0 \text{ (ח)} & , 16y'' + 24y' + 9y = 0 \text{ (ז)}
 \end{array}$$

#### פתרון שאלה 1

$$, 6y'' - y' - y = 0 \text{ (א)}$$

$$6k^2 - k - 1 = 0, D = 25 > 0, k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = -\frac{1}{3}, y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + c_2 e^{-\frac{1}{3}x}.$$

$$, 2y'' - 3y' + y = 0 \text{ (ב)}$$

$$2k^2 - 3k + 1 = 0, D = 1 > 0, k_1 = 1, k_2 = \frac{1}{2}, y = c_1 e^x + c_2 e^{\frac{1}{2}x}.$$

$$, y'' - 9y' + 9y = 0 \text{ (ג)}$$

$$k^2 - 9k + 9 = 0, D = 45 > 0, k_1 = \frac{9+3\sqrt{5}}{2}, k_2 = \frac{9-3\sqrt{5}}{2},$$

$$y = c_1 e^{(9+3\sqrt{5})x/2} + c_2 e^{(9-3\sqrt{5})x/2}.$$

$$, y'' - 2y' - 2y = 0 \text{ (ד)}$$

$$k^2 - 2k - 2 = 0, D = 12 > 0, k_1 = 1 + \sqrt{3}, k_2 = 1 - \sqrt{3}, y = c_1 e^{(1+\sqrt{3})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{3})x}.$$

$$, 9y'' + 6y' + y = 0 \text{ (ה)}$$

$$9k^2 + 6k + 1 = 0, D = 0, k_1 = k_2 = -1/3, y = e^{-x/3}(c_1 + c_2 x).$$

$$, y'' - 6y' + 9y = 0 \text{ (ו)}$$

$$k^2 - 6k + 9 = 0, D = 0, k_1 = k_2 = 3, y = e^{3x}(c_1 + c_2 x).$$

$$, 16y'' + 24y' + 9y = 0 \text{ (ז)}$$

$$16k^2 + 24k + 9 = 0, D = 0, k_1 = k_2 = -3/4, y = e^{-3x/4}(c_1 + c_2 x).$$

$$, y'' - 4y' + 8y = 0 \text{ (ח)}$$

$$k^2 - 4k + 8 = 0, D = -16 < 0, k = 2 \pm 2i, a = 2, b = 2, y = e^{2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

$$, y'' + 5y' + 8y = 0 \text{ (ט)}$$

$$k^2 + 5k + 8 = 0, D = -7 < 0, k = -5/2 \pm i\sqrt{7}/2, a = -5/2, b = \sqrt{7}/2,$$

$$y = e^{-5x/2}(c_1 \cos(\sqrt{7}x/2) + c_2 \sin(\sqrt{7}x/2)).$$

## שאלה 2

בנה משוואה דיפרנציאלית מסדר שני בעלת פתרון כללי:

$$. y = (C_1 + C_2 x)e^x \quad (\lambda) \quad , y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (\beta) \quad , y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (\alpha)$$

## פתרון שאלה 2

$$, y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \quad (\alpha)$$

$$a = 0, b = 1, k = \pm i, k^2 + 1 = 0, y'' + y = 0.$$

$$, y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \quad (\beta)$$

$$k_1 = 1, k_2 = -1, k^2 - 1 = 0, y'' - y = 0.$$

$$, y = (C_1 + C_2 x)e^x \quad (\lambda)$$

$$k_1 = k_2 = 1, k^2 - 2k + 1 = 0, y'' - 2y' + y = 0.$$

## שאלה 3

מצא פתרון כללי של כל אחת מהמשוואות הנתונות:

$$, y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x} \quad (\beta) \quad , y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x} \quad (\alpha)$$

$$, y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \quad (\delta) \quad , y'' + 2y' = 3 + 4 \sin x \quad (\gamma)$$

## פתרון שאלה 3

$$, y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x} \quad (\alpha)$$

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x},$$

$$y'' - 2y' - 3y = 0, \quad (-3) \quad y_p = Ae^{2x},$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0, \quad (-2) \quad y'_p = 2Ae^{2x},$$

$$k_1 = 3, k_2 = -1, \quad (1) \quad y''_p = 4Ae^{2x},$$

$$y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{-x}, \quad (1) \quad -3A - 4A + 4A = 3,$$

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x}, \quad A = -1,$$

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} - e^{2x}.$$

$$, y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x} \quad (2)$$

$$y'' - 2y' - 3y = -3xe^{-x},$$

$$y'' - 2y' - 3y = 0,$$

$$(-3) \quad y_p = (Ax^2 + Bx)e^{-x},$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0,$$

$$(-2) \quad y'_p = (-Ax^2 - Bx + 2Ax + B)e^{-x},$$

$$k_1 = 3, \quad k_2 = -1,$$

$$(1) \quad y''_p = (Ax^2 + Bx - 4Ax - 2B + 2A)e^{-x},$$

$$y_1 = e^{3x}, \quad y_2 = e^{-x},$$

$$(x^2) \quad -3A + 2A + A = 0,$$

$$y_h = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x},$$

$$(x) \quad -3B + 2B - 4A + B - 4A = -3,$$

$$(1) \quad -2B - 2B + 2A = 0,$$

$$A = \frac{3}{8}, \quad B = -\frac{3}{16},$$

$$y = y_h + y_p = c_1 e^{3x} + (c_2 + \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{16}x)e^{-x}.$$

$$, y'' + 2y' = 3 + 4\sin x \quad (2)$$

$$y'' + 2y' = 3 + 4\sin x,$$

$$y'' + 2y' = 0,$$

$$k^2 + 2k = 0,$$

$$(0) \quad y_p = Ax + B\cos x + C\sin x,$$

$$k_1 = 0, \quad k_2 = -2,$$

$$(2) \quad y'_p = A - B\sin x + C\cos x,$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = e^{-2x},$$

$$(1) \quad y''_p = -B\cos x - C\sin x,$$

$$y_h = c_1 + c_2 e^{-2x},$$

$$(\cos x) \quad 2C - B = 0,$$

$$(\sin x) \quad -2B - C = 4,$$

$$(x) \quad 0 = 0,$$

$$(1) \quad 2A = 3,$$

$$A = \frac{3}{2}, \quad B = -\frac{8}{5}, \quad C = -\frac{4}{5},$$

$$y = y_h + y_p = c_1 + c_2 e^{-2x} + \frac{3}{2}x - \frac{8}{5}\cos x - \frac{4}{5}\sin x.$$

$$, y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \quad (\tau)$$

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x},$$

$$y'' + 2y' + y = 0, \quad (1) \quad y_p = Ax^2 e^{-x},$$

$$k^2 + 2k + 1 = 0, \quad (2) \quad y'_p = (-Ax^2 + 2Ax)e^{-x},$$

$$k_1 = k_2 = -1, \quad (1) \quad y''_p = (Ax^2 - 4Ax + 2A)e^{-x},$$

$$y_1 = e^{-x}, y_2 = xe^{-x}, \quad (x^2) \quad A - 2A + A = 0,$$

$$y_h = (c_1 + c_2 x)e^{-x}, \quad (x) \quad 4A - 4A = 0,$$

$$(1) \quad 2A = 2,$$

$$A = 1,$$

$$y = y_h + y_p = (c_1 + c_2 x + x^2)e^{-x}.$$

#### שאלה 4

הגדר צורה מתאימה של  $y_p(x)$  (אחד מהפתרונות הפרטיים של המשוואה הלא הומוגנית) לפי שיטת המקדמים הלא מוגדרים. אין לחשב את המקדמים.

$$, y'' - y' - 2y = e^x \cos x - x^2 + x \quad (\text{ב}) \quad , y'' + y = \sin x + x \cos x + 3e^x \quad (\text{א})$$

$$, y'' - y = e^x - 7 + \cos x \quad (\text{ד}) \quad , y'' - 4y' + 5y = e^{5x} + x \sin 3x - \cos 3x \quad (\text{ג})$$

$$. y'' - 2y' + y = xe^{-x} - x^2 e^x - 2e^x \sin x + 3 \quad (\text{ה})$$

#### פתרון שאלה 4

$$, y'' + y = \sin x + x \cos x + 3e^x \quad (\text{א})$$

$$y'' + y = \sin x + x \cos x + 3e^x,$$

$$y'' + y = 0,$$

$$k^2 + 1 = 0, \quad y_p = (Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x + Ee^x,$$

$$k_1 = i, k_2 = -i, a = 0, b = 1,$$

$$y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x,$$

$$, y'' - y' - 2y = e^x \cos x - x^2 + x \quad (\text{б})$$

$$y'' - y' - 2y = e^x \cos x - x^2 + x,$$

$$y'' - y' - 2y = 0,$$

$$k^2 - k - 2 = 0, \quad y_p = e^x (A \cos x + B \sin x) + Cx^2 + Dx + E,$$

$$k_1 = 2, k_2 = -1,$$

$$y_h = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x},$$

$$, y'' - 4y' + 5y = e^{5x} + x \sin 3x - \cos 3x \quad (\text{а})$$

$$y'' - 4y' + 5y = e^{5x} + x \sin 3x - \cos 3x,$$

$$y'' - 4y' + 5y = 0,$$

$$k^2 - 4k + 5 = 0, \quad y_p = Ae^{5x} + (Bx + C) \cos 3x + (Dx + E) \sin 3x,$$

$$k_1 = 2 + i, k_2 = 2 - i, a = 2, b = 1$$

$$y_h = e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x),$$

$$, y'' - y = e^x - 7 + \cos x \quad (\text{т})$$

$$y'' - y = e^x - 7 + \cos x,$$

$$y'' - y = 0,$$

$$k^2 - 1 = 0, k_1 = 1, k_2 = -1,$$

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x},$$

$$y_p = Axe^x + B + C \cos x + D \sin x.$$

$$, y'' - 2y' + y = xe^{-x} - x^2 e^x - 2e^x \sin x + 3 \quad (\text{н})$$

$$y'' - 2y' + y = xe^{-x} - x^2 e^x - 2e^x \sin x + 3,$$

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

$$k^2 - 2k + 1 = 0, k_1 = k_2 = 1,$$

$$y_h = e^x (c_1 + c_2 x)$$

$$y_p = (Ax + B)e^{-x} + (Cx^2 + Dx + E)x^2 e^x + e^x (F \cos x + G \sin x) + H.$$