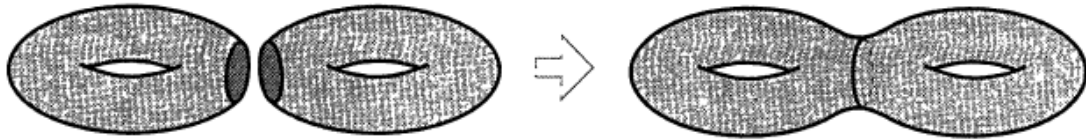


טופולוגית מנה (המשך)



תזכורת:

הגדרה: ננה (X, τ) מ"ט ונתונה פונקציה על $q: X \rightarrow Y$

(למשל $q: X \rightarrow X/\sim$ פונקציה שמושרית מיחס שקילות).

אומרים ש σ טופולוגית המנה אם מתקיימים שני תנאים הבאים:

א. $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ רציפה.

ב. אם $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \lambda)$ רציפה אז $\lambda \subseteq \sigma$.

במצב כזה גם אומרים ש $q: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ היא פונקציית מנה (או העתקת מנה).

לעיתים σ נקראת גם "טופולוגיה חזקה" (strong topology).

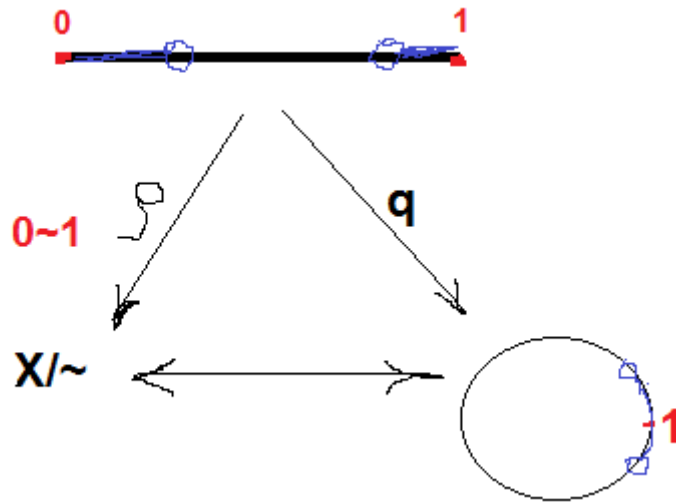
תאור של טופולוגית המנה: $\sigma := \{O \subseteq Y \mid q^{-1}(O) \in \tau\}$

דוגמה: $f: X = [0, 1] \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ $f(x) = \text{cis}(2\pi x)$

היא פונקציית מנה (הפונקציה היא על רציפה וסגורה).

הערה: אפשר לתת גם הסבר גיאומטרי: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

$$X \rightarrow X/\sim \cong Y, \quad 0 \sim 1$$



דוגמה: $\text{id} : (\mathbb{R}, \tau_{discr}) \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה על אבל לא פונקצית מנה.

הסבר: המקור $\text{id}^{-1}(\{5\}) = \{5\}$ פתוח ב $(\mathbb{R}, \tau_{discr})$ אבל לא ב \mathbb{R} .

דוגמה: פונקציה רציפה $\text{id} : (X, \tau_1) \rightarrow (X, \tau_2)$ פונקצית מנה אם ורק אם $\tau_1 = \tau_2$.

דוגמה: $h : X = [0, 1) \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$ $h(x) = \text{cis}(2\pi x)$

הפונקציה היא על ורציפה אבל היא לא פונקצית מנה.

הסבר: עבור $A := \{z \in T \mid 0 \leq \arg(z) < \frac{\pi}{2}\}$ המקור $h^{-1}(A) = [0, \frac{1}{4})$ פתוח ב $[0, 1)$

אבל A לא פתוח ב T .

אזהרות:

1. להיות פונקצית מנה – לא תורשתית. ז"א יתכן ש $f : X \rightarrow Y$ העתקת מנה $A \subseteq X$.
ופונקצית על שמושרית $f_A : A \rightarrow f(A)$ היא לא תמיד מנה.
למשל להתבונן בדוגמאות שהיו עם $A = [0,1) \subset X = [0,1]$.
דוגמה נוספת: $p_1 : X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\} \cup \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ לא מנה
(כי המקור של $\{0\}$ הוא נקודון $\{(0,0)\}$ שהיא נקודה מבודדת ב X
אבל $\{0\}$ לא פתוח ב \mathbb{R}).

2. מרחב מנה יכול להיות מאוד מסובך ("הרבה יותר מהמקור"). למשל:
א. ריבוע דו-ממדי הוא מרחב מנה של קטע (Square-filling curves).
ב. כל מרחב מטרי קומפקטי הוא מרחב מנה של קבוצת קנטור.

3. פונקצית מנה יכולה להיות לא פתוחה ולא סגורה.

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

דוגמה: עבור הפונקציה

- טופולוגית מנה על $Y = \{0,1\}$ היא טופולוגית סרפינסקי $\sigma = \{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\}$.
 $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$ לא פתוחה ולא סגורה (דוגמה נוספת בהמשך).
בנוסף שימו לב שמרחב מנה (שהוא מרחב סרפינסקי) לא T_1 .

4. בהעתקות מנה אקסיומות הפרדה לא תמיד נשמרות.

הערה: מרחב מנה הוא בעל תכונת T_1 אם"ם כל מחלקת שקילות היא סגורה.

דוגמה: ב \mathbb{R} נגדיר יחס שקילות $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Q}$. אז מרחב מנה \mathbb{R}/\sim

הוא בעל טופולוגיה טריוויאלית (מה העוצמה של \mathbb{R}/\sim ?)

הסבר: מחלקות שקילות הן מהצורה $[a] = a + \mathbb{Q}$. צפוף ולא סגור ב \mathbb{R} .

לכל מקור $q^{-1}(C)$ של תקבוצה לא ריקה C ב \mathbb{R}/\sim לגבי פונקציה טבעית
 $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$

הקבוצה $q^{-1}(C)$ היא גם צפופה ב \mathbb{R} (כי $q^{-1}(C)$ מכיל לפחות מחלקה אחת).

לכן האפשרות היחידה ש $q^{-1}(C)$ סגור היא $q^{-1}(C)$. אבל אז

$C = qq^{-1}(C) = q(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\sim$ (קחו בחשבון ש $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ על).

לכן ב \mathbb{R}/\sim עם טופולוגיה מנה σ יש רק קבוצה אחד סגורה לא ריקה (שהיא \mathbb{R}/\sim).
 שקול: σ טופולוגיה טריוויאלית.

משפט: (הומיאומורפיזם ומנה)

נניח $f: X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה, על + חח"ע. אז f מנה אם ורק אם f הומיאומורפיזם.

הוכחה: כיוון אחד ברור (כי כל הומיאומורפיזם פונקצית מנה).

בכיוון השני נניח $f: X \rightarrow Y$ מנה וחח"ע. צ"ל f הומיאומורפיזם. מ"ל f פתוח.

לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq X$ מתקיים תמיד $U \subseteq f^{-1}(f(U))$. אצלנו בעצם
 $U = f^{-1}(f(U))$ (בגלל f חח"ע).

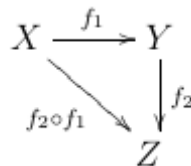
לפי הגדרת טופולוגיה מנה קבוצה $O := f(U)$ היא חייבת להיות פתוחה ב Y .
 הוכחנו ש f פתוח.



משפט (תנאי מספיק "צמצום")

נניח $f_1: X \rightarrow Y$ $f_2: Y \rightarrow Z$ פונקציות רציפות.

אם ההרכבה $f = f_2 \circ f_1: X \rightarrow Z$ היא פונקצית מנה אז גם $f_2: Y \rightarrow Z$ פונקצית מנה.

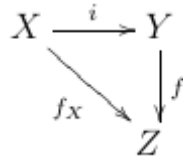


הוכחה: צ"ל $f_2 : Y \rightarrow Z$ מנה. נניח $f_2^{-1}(A)$ פתוח ב Y . לפי הרציפות של $f_1 : X \rightarrow Y$ נקבל ש $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A))$ פתוח ב X . ברור $f = f_2 \circ f_1 : X \rightarrow Z$ אבל נתון ש $f_1^{-1}(f_2^{-1}(A)) = (f_2 \circ f_1)^{-1}(A)$ פונקצית מנה. לכן A פתוחה.



תוצאה: נניח $f : Y \rightarrow Z$ רציפה על וקיימת תת קבוצה $X \subseteq Y$ כך שצמצום $f_x : X \rightarrow Z$ הוא על ופונקצית מנה. אז גם $f : Y \rightarrow Z$ מנה.

הסבר: נפעיל משפט " הכללת קריטריון מנה" באופן הבא כאשר $i : X \rightarrow Y$ שיכון טבעי



הגדרה: נניח $f : X \rightarrow Y$ ונתון יחס שקילות \sim ב X (או נתונה חלוקה של X).

אומרים שפונקציה $f : X \rightarrow Y$

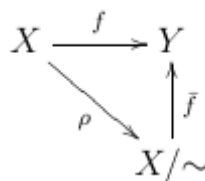
א. מכבדת את היחס \sim אם $a \sim b \Rightarrow f(a) = f(b)$

ב. מגדירה את היחס \sim אם $a \sim b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$

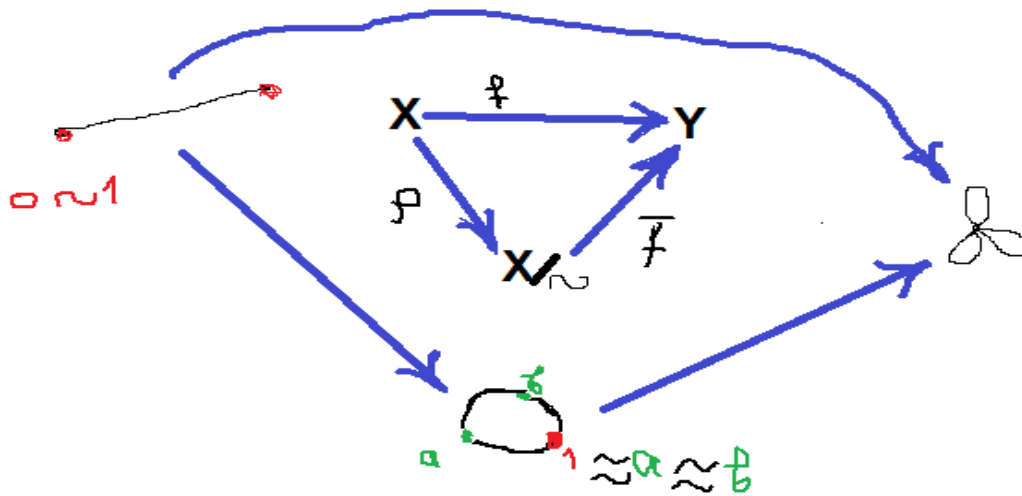
תכונות:

1. $f : X \rightarrow Y$ מכבדת את היחס \sim אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על הבאה

$$(f = \bar{f} \circ \rho \text{ א"י}) \quad \bar{f} : X/\sim \rightarrow Y \quad \bar{f}([x]) = \bar{f}(\rho(x)) = f(x)$$



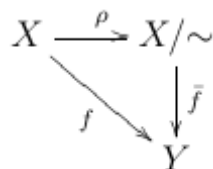
הערה: פירוש אינטואיטיבי -- יתכן ו $f : X \rightarrow Y$ מדביקה יותר נקודות מיחס שקילות \sim למשל



מוסכמה: בהמשך על X/\sim ניקח טופולוגית מנה (אם לא נאמר אחרת).

2. $f : X \rightarrow Y$ רציפה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ רציפה.

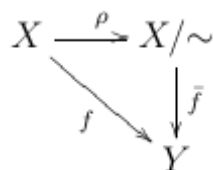
הסבר: נפעיל משפט "טופולוגיה חזקה" עבור הדיאגרמה הבאה



אם $f : X \rightarrow Y$ רציפה אז גם $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$.

3. $f : X \rightarrow Y$ מנה אם ורק אם $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ מנה

הסבר: נפעיל משפט "צמצום" עבור הדיאגרמה הבאה



אם $f : X \rightarrow Y$ מנה אז גם $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$.

4. $f : X \rightarrow Y$ מגדירה את היחס \sim אם ורק אם מוגדרת היטב פונקצית על $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ והיא חח"ע.

משפט (קריטריון למנה)

נניח $f : X \rightarrow Y$ פונקציה רציפה על. נסמן ב X/\sim_f מרחב מנה כאשר \sim_f הוא היחס שמוגדר ע"י $f : X \rightarrow Y$ (ז"א $a \sim_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$).

התנאים הבאים שקולים:

א. $f : X \rightarrow Y$ מנה.

ב. פונקציה מושרית $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ היא הומיאומורפיזם

הוכחה:

ב \Leftarrow א

ברור כי $f = \bar{f} \circ \rho$ הרכבה של שתי פונקציות מנה. כי $\rho : X \rightarrow X/\sim_f$ פונקצית מנה (כי בחרנו X/\sim_f בטופולוגית מנה) ו \bar{f} הומיאומורפיזם.

א \Leftarrow ב

נתון $f : X \rightarrow Y$ מנה. לפי תכונה 3 נקבל $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ גם מנה. אבל $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ (על ו) חח"ע לפי תכונה 4.

לכן לפי משפט "הומיאומורפיזם ומנה" נקבל ש $\bar{f} : X/\sim_f \rightarrow Y$ הומיאומורפיזם.



הערה חשובה: תכונות הנ"ל עוזרות להוכיח הומיאומורפיזם עם מרחבי מנה מסוימים.

דוגמה: הדבקת נקודות קצה של קטע מגדיר מעגל.

הסבר: נגדיר פונקציה

$$f : X = [0,1] \rightarrow Y = T = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\|=1\} \quad f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$$

הפונקציה היא מנה (כפונקציה רציפה סגורה על מרחב האוסדורף).

$f : X \rightarrow T$ מגדירה את היחס $0 \sim 1$.

לפי משפט קריטריון קיים הומומורפיזם $\bar{f} : [0,1] / \sim_f \rightarrow T$

לכן $[0,1] / \sim_f \cong T$.

תרגיל: הוכיחו:

א. $f : \mathbb{R} \rightarrow T, f(x) = \text{cis}(2\pi x)$ פונקצית מנה.

ב. $\mathbb{R} / \mathbb{Z} \cong T$.

(כאשר $\mathbb{R} / \mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגיית מנה)

הסבר של א

(דרך 1) אפשר להשתמש בתוצאת משפט צמצום עבור ההכלה $i : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$.

(דרך 2) אפשר להוכיח שבעצם $f : \mathbb{R} \rightarrow T, f(x) = \text{cis}(2\pi x)$ פתוחה.

הסבר של ב

כאן אפשר להשתמש בחלק א יחד עם משפט קריטריון למנ אם ניקח בחשבון שיחס שקילות

$$a \sim_f b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a \equiv b \pmod{\mathbb{Z}}$$

הערה: מחלקת שקילות של $a \in \mathbb{R}$ הוא $[a] = a + \mathbb{Z}$. ז"א תאור אחר של היחס הוא

$$a \sim_f a + n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

תרגיל: * במעגל יחידה $T = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\}$ במישור המרוכב נגדיר יחס שקילות

$v \sim -v$. הוכיחו שמרחב מנה T / \sim הוא הומומורפי למעגל עצמו T .

פתרון: $f : T \rightarrow T, f(v) = v^2$ היא פונקצית מנה (מדוע?). היא מגדירה יחס שקילות

בדיוק $v \sim -v$.

מידע: כאן בעצם אנחנו מחשבים "מרחב המסלולים" (אורביטות) לגבי פעולה טבעית

חבורה ציקלית $\mathbb{Z}_2 = \{e, \sigma\}$ עם שני איברים על המעגל T (הפעולה היא היפוך הסימן)

$$\mathbb{Z}_2 \times T \rightarrow T \quad (\sigma, v) \mapsto \sigma(v) = -v$$

תרגיל: הוכיחו שאם ב \mathbb{R} לכוף קטע $[0,1]$ לנקודה 0 אז מרחב מנה הומיאומורפי ל \mathbb{R} .

פתרון: נגדיר את הפונקציה

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 0 & 0 \leq x \leq 1 \\ x-1 & 1 \leq x \end{cases}$$

הפונקציה היא רציפה על "ומדביקה" את כל הנקודות של קטע $[0,1]$. על מנת להוכיח שהפונקציה היא מנה מ"ל שהיא סגורה נתבונן ב 3 פונקציות צמצום שהן רציפות:

$$f_1: (-\infty, 0] \rightarrow (-\infty, 0], f_2: [0, 1] \rightarrow \{0\}, f_3: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

שמגדירות את הפונקציה באופן טבעי.

הפונקציות גם סגורות (שני הומיאומורפיזמים ואחד קבוע).

התמונות הן סגורות ב \mathbb{R} . לכן גם ההרכבות

$$f_1: (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}, f_2: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f_3: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

פונקציות סגורות.

לכל תת קבוצה סגורה $A \subseteq \mathbb{R}$ נציג אותה כאיחוד

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \quad A_1 = A \cap (-\infty, 0], A_2 = A \cap [0, 1], A_3 = A \cap [1, \infty)$$

של 3 תת קבוצות סגורות ב \mathbb{R} . התמונה $f(A) = f(A_1) \cup f(A_2) \cup f(A_3)$

סגורה ב \mathbb{R} כאיחוד סופי של קבוצות סגורות.

יריעות מסוימות כמנה של ריבוע

הגדרה: יריעה בעלת מימד n היא מרחב האוסדורף, שמקיים את אקסיומת המנייה השנייה, בעל התכונה שלכל נקודה במרחב יש סביבה שהומיאומורפית לחצי-מרחב

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x_n\}$$

אם במקום H אפשר לקחת \mathbb{R}^n אז אומרים יריעה ללא שפה.

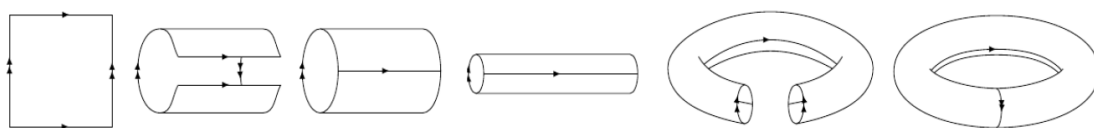
למשל: כל קבוצה פתוחה ב \mathbb{R}^n יריעה בעל מימד n , מעגל, טורוס ... יריעה ללא שפה.

כדור סגור ב \mathbb{R}^n יריעה בעל מימד n עם שפה. ריבוע יריעה בעל מימד 2 עם שפה.

נראה כמה דוגמאות של יריעות 2-ממדיות שמתקבלות כמנה של ריבוע.

• טורוס דו-ממדי T^2 2-dimensional torus

אפשר לקבל אותו כמנה של גליל (שלב ביניים)



This image from <http://i.stack.imgur.com/FJaFe.png>.

תרגיל: הוכיחו $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$

($\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 = \{(x, y) + \mathbb{Z}^2 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ מסמן קבוצת מנה של מחלקות עם טופולוגיית מנה)

פתרון: נתחיל מהפונקציה $f(x, y) = (cis 2\pi x, cis 2\pi y)$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$.

צמצום הפונקציה $f: [0, 1]^2 \rightarrow T^2$ פונקציית מנה. לכן לפי **משפט** (תנאי מספיק "צמצום") גם $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ מנה.

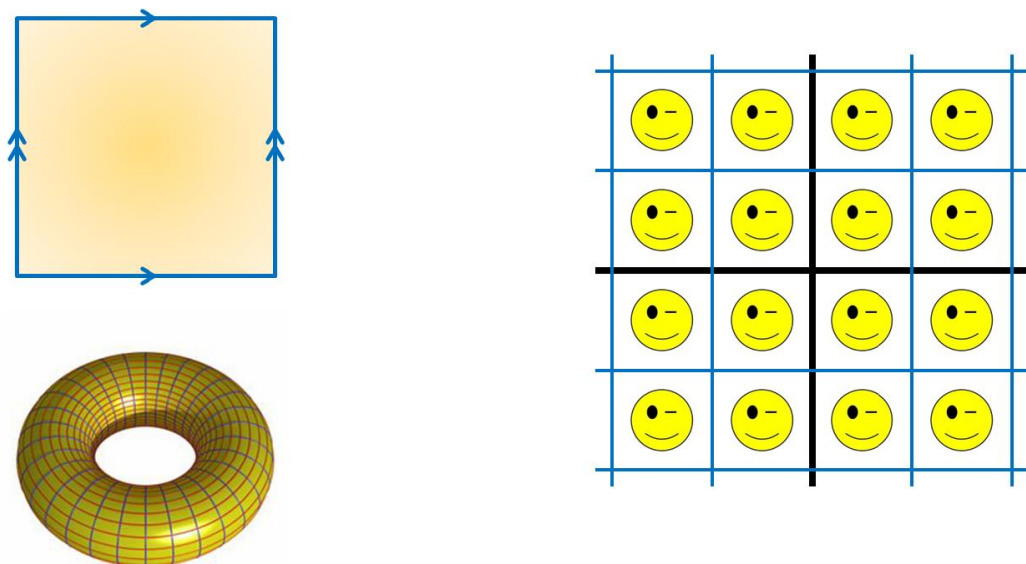
כעת לפי **משפט** (קריטריון למנה) נקבל $\mathbb{R}^2 / \sim_f \cong T^2$.

כאן יחס שקילות מתאימה היא $(a, b) \sim_f (a + n, b + m) \quad \forall n, m \in \mathbb{Z}$ המחלקות

הן $\{(x, y) + \mathbb{Z}^2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. לכן קבוצת מנה מתאימה היא בדיוק $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$.

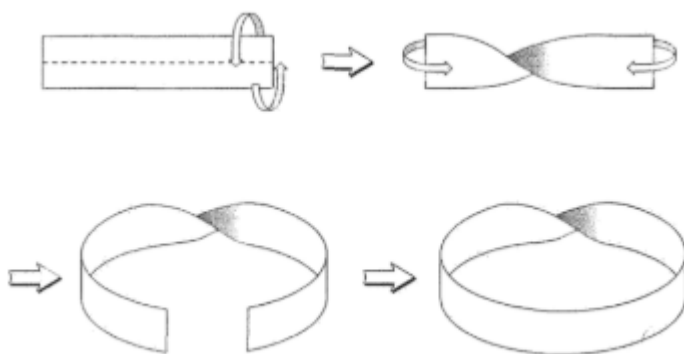
לכן מרחב מנה \mathbb{R}^2 / \sim_f כאן הוא בעצם $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$.

כבר הוכחנו הומאומורפיזם $\mathbb{R}^2 / \sim_f \cong T^2$. לכן גם $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$.



מידע: מי שלמד תורת החבורות בהחלט מבין שקבוצת מנה $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ היא חבורת מנה. בשפה יותר מתמטית כאן מדובר על איזומורפיזם של חבורות טופולוגיות $\mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2 \cong T^2$

• Mobius strip טבעת מוביוס



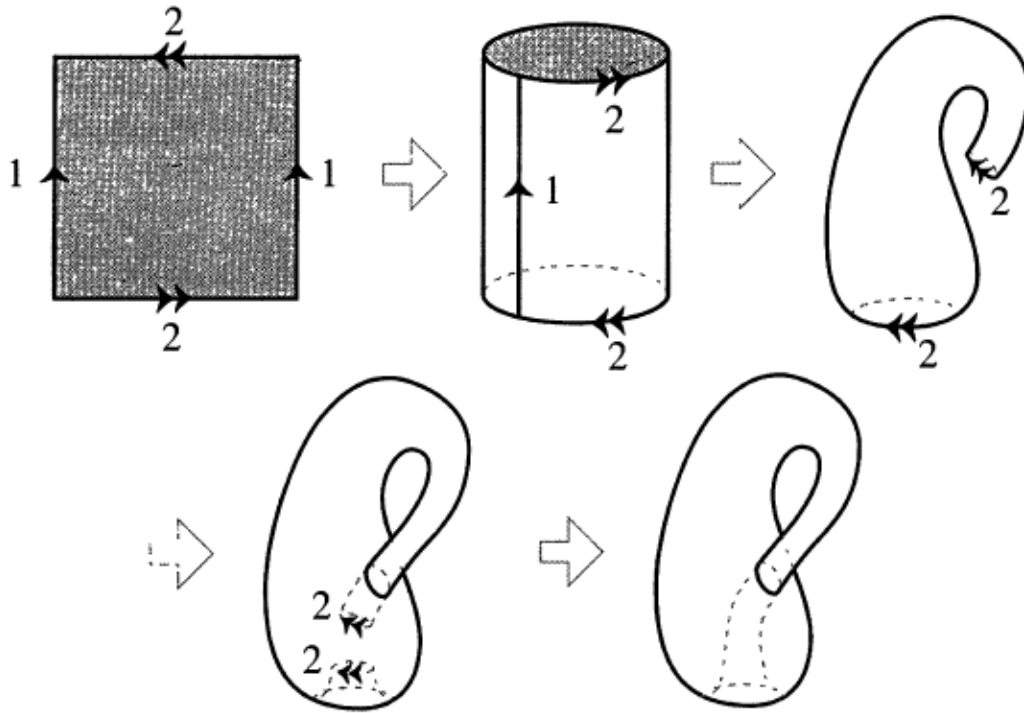
. הוא 2-ממדי. ללא אוריאנטציה. אפשר לקבל אותו גם כן \mathbb{R}^3 משוכן לתוך



Klein bottle

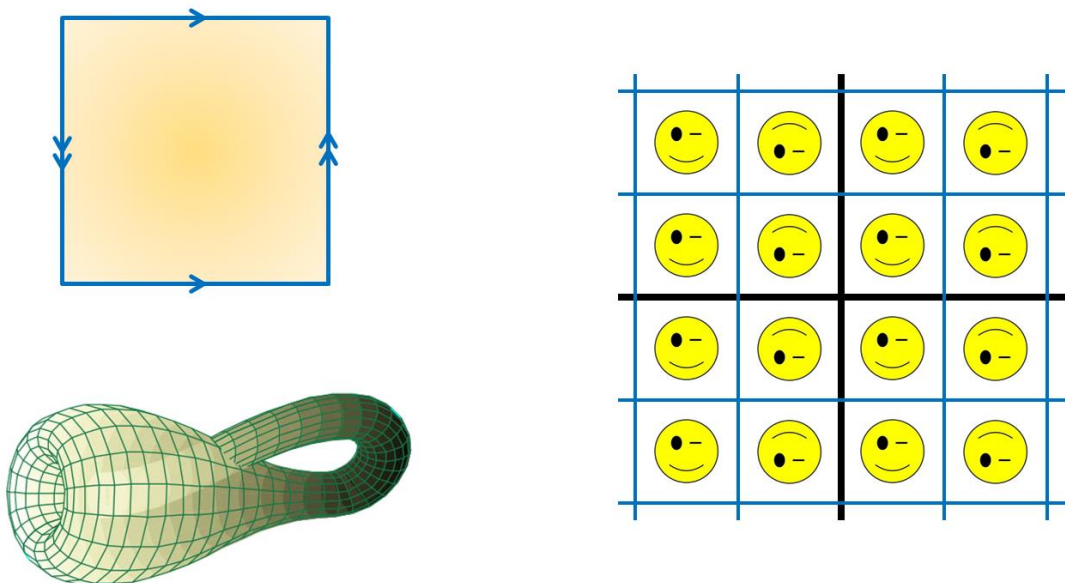
• בקבוק קליין

אפשר לקבל אותו כמנה של ריבוע



לא ניתן לשכן לתוך \mathbb{R}^3 .

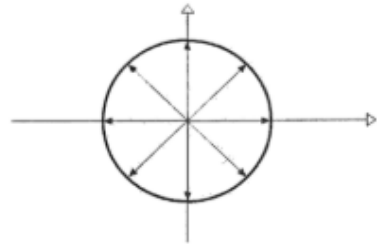
אפשר לקבל אותו דרך הדבקת שפות של שתי טבעות מוביוס.



• מרחב פרוייקטיבי Projective space

$P^n =$ מרחב קווים ישרים ב $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ שעוברים דרך 0.

פונקציה מנה $q: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n$



צמצום של הפונקציה הנ"ל $q_S: S^n \rightarrow P^n$ על ספירה יחידה n -ממדית מוכיח שאכן q מנה

בגלל תוצאה של ה משפט: תנאי מספיק "צמצום"

כאן יחס שקילות שמתקבל על S^n הוא $-v \sim v$ (antipodal points)

Projective line מקרה פרטי $q: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow P^1$

טענה: P^1 הומואומורפי למעגל S^1 .

הסבר: שקול לדבר על מישור \mathbb{R}^2 כמרחב מספרים מרוכבים \mathbb{C} . ובמקום S^1 על T .

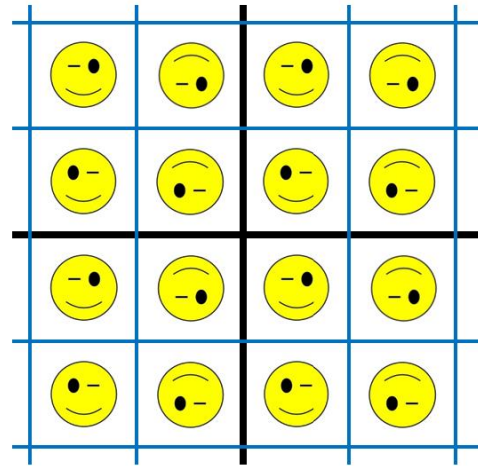
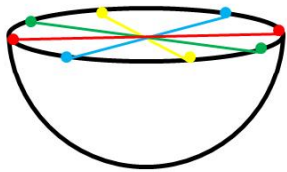
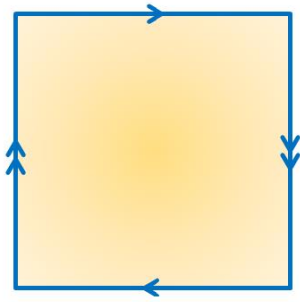
נגדיר (תרגיל שהיה) $f: T \rightarrow T, f(v) = v^2$ היא פונקציה מנה (פונקציה רציפה ועל מקומפקטי להאוסדופי). היא מגדירה יחס שקילות בדיוק $-v \sim v$.

מישור פרוייקטיבי Projective plane

$P^2 =$ מרחב קווים ישרים (מנוקבים) ב $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ שעוברים דרך 0.

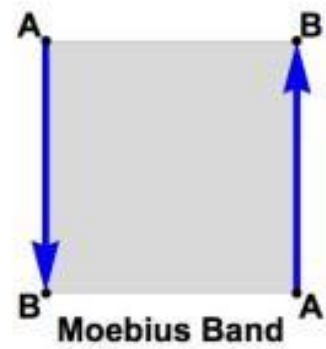
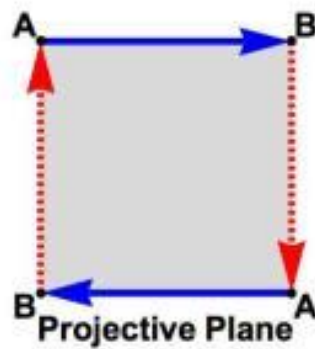
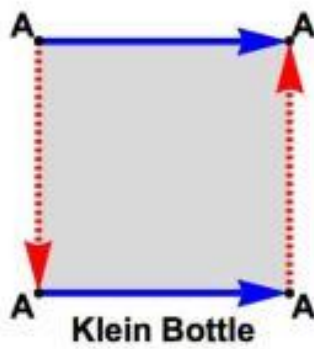
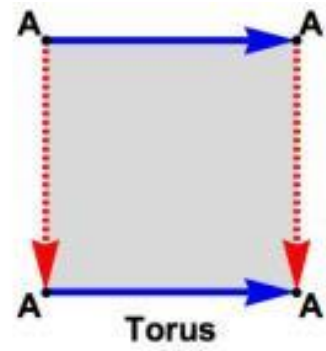
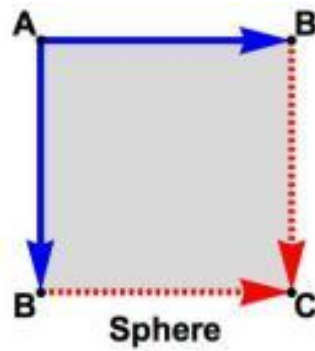
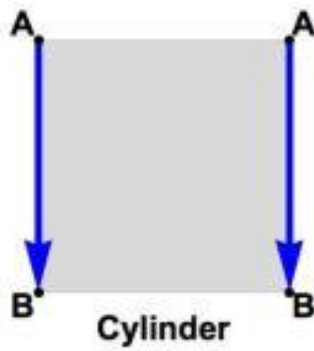
אפשר לקבל דרך $q_S: S^2 \rightarrow P^2$

אפשרויות נוספות: כמנה של ריבוע, כמנה של חצי-ספירה, כמנה של מישור



זאת קומפקטיפיקציה של \mathbb{R}^2 (לא חד-נקודתית)

סיכום: מנות מסוימות של ריבוע



תרגילים נוספים:

תרגיל: בספירה $S_2 := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \|v\| = 1\}$ נגדיר יחס שקילות ע"י

$$(x_1, y_1, z_1) \sim (x_2, y_2, z_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

לתאר מרחב מנה S_2 / \sim .

תרגיל: ב \mathbb{R} נגדיר יחס שקילות ע"י

$$x \sim -x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

מה הוא מרחב מנה \mathbb{R} / \sim ?

תרגיל: ב \mathbb{R} נגדיר יחס שקילות ע"י

$$x \sim y \Leftrightarrow \sin x = \sin y$$

מה הוא מרחב מנה \mathbb{R} / \sim ?

תרגיל: מרחב מנה S^1 / \sim של גליל $S^1 \times [0, 1]$ כשמכוצים את כל הנקודות של בסיס $S^1 \times \{0\}$ לנקודה אחת הומיאומורפי לדיסק סגור דו-מימדי

$$f : S^1 \times [0, 1] \rightarrow D \quad f(x, t) = tx$$

תרגיל: הוכיחו שכל רטרקציה רציפה היא מנה.

הגדרה: נניח Y תת מרחב טופולוגי של X . פונקציה $f : X \rightarrow Y$ נקראת "רטרקציה" retraction אם

$$\forall y \in Y \quad f(y) = y$$

(שקול: $f \circ f = f$ רציפה על ומתקיים)

תרגיל: נניח $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \vee y = 0\}$ (תת מרחב של \mathbb{R}^2).

נגדיר פונקציה $f : X \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = x$ (צמצום של הטלה).

הוכיחו ש f פונקציית מנה אבל f לא סגורה ולא פתוחה.