למה

אופרטורים דיפרנציאליים עם מקדמים קבועים מתחלפים:

$$L_1(L_2 f) = L_2(L_1 f)$$

הערה

האופרטורים $L_1 f(x) = f'(x)$, $L_2 f(x) = x f(x)$ <u>אינם</u> מתחלפים:

$$L_1(L_2 f) \neq L_2(L_1 f)$$

הגדרה

$$Df = f'$$

למה

כל אופרטור דיפרנציאלי עם מקדמים קבועים הוא פולינום ב $-D$:

$$Ly = y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y$$

$$\Updownarrow$$

$$L = D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0$$

$$D^n = D(D^{n-1})$$

משפט היסוד של אלגברה

כל פולינום מעל $\mathbb{R}$ מתפרק למכפלה של גורמים לינאריים $x - a$ וגורמים ריבועיים אי פריקים $x^2 + bx + c$ כאשר $b^2 < 4ac$

למה

אם ל- L_1 ו- L_2 אין גורמים משותפים בפירוק כפולינומים אזי:

$$\ker(L_1 \circ L_2) = \ker L_1 \oplus \ker L_2$$

דוגמה

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

$$Ly = 0, L = D^2 + 2D - 3 = (D+3)(D-1)$$

הפתרונות למשוואות הנובעות:

$$(D+3)y = 0 \Rightarrow y = c_1 e^{-3x}$$

$$(D-1)y = 0 \Rightarrow y = c_2 e^{x}$$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{x}$$

למה

אופרטורים דיפרנציאליים עם מקדמים קבועים מתחלפים:

$$L_1(L_2f) = L_2(L_1f)$$

למה

L אופרטור עם מקדמים קבועים

$$Ly = 0 \Longrightarrow L^{m+1}(x^m y) = 0$$

דוגמה

$$(D-1)^2 y = 0$$

$y = c_1e^x$ פותר את המשוואה $(D-1)y = 0$ לכן מהלמה $(D-1)^2(xe^x) = 0$

הוכחת הלמה האחרונה

נוכיח באינדוקציה.

עבור $m = 0$ הטענה טריוויאלית, לכן נניח את נכונות הטענה עבור $k = 1,2,\cdots,m$.

$$L^{m+1}(x^m y) = L^m\big(L(x^m y)\big) = L^m(x^m L(y) + \sum_{k=0}^{m-1} x^k L_k(y)$$

וכל L_k אופרטור עם מקדמים קבועים.

על כל איבר אחר $L^m\left(x^k L_k(y)\right)$. מפעילים את הנחת האינדוקציה:

$$L^m\left(x^k L_k(y)\right) = 0 \Longleftarrow L\big(L_k(y)\big) = 0$$

מכיוון ש - $L\big(L_k(y)\big) = L_k\big(L(y)\big) = L_k(0) = 0$

דוגמה

$$(D^3+1)=y'''+y=0$$
$$D^3+1=(D+1)(D^2-D+1)_{\text{אי-פריק}}$$

$$(D+1)y=0$$
$$y=c_1e^{-x}$$

$$(D^2-D+1)y=0$$
$\lambda^2-\lambda+1$ פולינום אופייני
$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\Rightarrow y=e^{\frac{x}{2}}(A\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+B\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$
$$\Rightarrow \boxed{y(x)=c_1e^{-x}+c_2e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+c_3e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)}$$

הערה

פתרנו את המשוואות הלינאריות הומוגניות מסדר כלשהו. את האי הומוגניות אפשר אז לפתור דרך וריאציית מקדמים. <u>אם</u> החלק האי הומוגני הוא מכפלה של המשפחות הבאות:

1. פולינומים
2. מעריכיות
3. $\sin wx , \cos wx$

א יש קיצור לפתרון המשוואה האי הומוגני. דרך הפתרון: ניקח אופרטור M המשמיד את $b(x)$ שלנו:

$$Ly=b(x)$$
$$\Longrightarrow MLy=0$$

כאשר M,L אופרטורים עם מקדמים קבועים.