

## מבחן מועד א' – 88-133 אינפי 2 תשפ"א

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100.  
משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א.  $\int \frac{2x^2+1}{(x+2)^3} dx$       ב.  $\int x\sqrt{1+x^2} dx$

2. קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים:

א.  $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x} dx$       ב.  $\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$

3. קבעו עבור סדרת הפונקציות  $f_n(x) = (\ln(x))^n$  אם היא מתכנסת במידה שווה בכל אחת מן התחומים הבאים:

א.  $A = (1, e)$

ב.  $B = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}, 1\right)$

4. תהי  $f$  פונקציה בעלת נגזרת רציפה בקטע  $[a, b]$ . לכל חלוקה  $P = \{x_0, \dots, x_n\}$  של הקטע  $[a, b]$  נגדיר את

$$D(f, P) = \sum_{i=1}^n \frac{f^2(x_i) - 2f(x_i)f(x_{i-1}) + f^2(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

א. הוכיחו כי אם  $P_n$  היא סדרת חלוקות עבודה  $\lambda(P_n) \rightarrow 0$ , מתקיים כי  $D(f, P_n) \rightarrow \int_a^b (f'(x))^2 dx$

ב. חשבו את גבול הסדרה הבאה:

$$a_n = \sum_{k=1}^n n \left( \sin^2\left(\frac{k}{n}\right) - 2 \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k-1}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{k-1}{n}\right) \right)$$

5. תהי  $f$  בעלת נגזרת רציפה בקטע  $(0,1]$ , כך שהנגזרת  $f'$  אינה חסומה בקטע  $(0,1]$ .

א. הוכיחו/הפריכו: האינטגרל  $\int_0^1 f'(x) dx$  מתכנס.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם  $f$  רציפה בקטע  $[0,1]$  אזי  $\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0)$ .