

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 12: נקודות סינגולריות

1. (א) מיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z) = \frac{e^{1/(z-1)}}{e^z - 1}$.

$z = 1$ סינגולרית עיקרית. ניקח $z = x$ ונקבל

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f = \infty \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f = 0$$

נראה כעת כי הנקודות $z_k = 2\pi ki, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ הן קטבים פשוטים (מסדר ראשון). נרשום

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{e^{1/(z-1)}}{(z - z_k) + \frac{1}{2!}(z - z_k)^2 + \dots} = \\ &= \frac{1}{z - z_k} \left(\frac{e^{1/(z-1)}}{1 + \frac{1}{2!}(z - z_k) + \dots} \right) = \frac{\varphi(z)}{z - z_k}, \end{aligned}$$

כאשר $\varphi(z)$ אנליטית בסביבת הנקודות z_k ו $\varphi(z_k) \neq 0$.

(ב) משפט פיקארד:

פונקציה אנליטית בסביבה מנוקבת של נקודה סינגולרית עיקרית z_0 מקבלת אינסוף פעמים כל ערך סופי (פרט אולי אחד) בכל סביבה של z_0 .

הראו כי $z_0 = 0$ נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z) = e^{1/z}$ בעזרת משפט פיקארד.

נראה כי למשוואה $f(z) = e^{1/z} = c$ יש אינסוף פתרונות שואפים ל $z_0 = 0$ לכל $c \neq 0$. נרשום $z = r(\cos \phi + i \sin \phi), c = |c|e^{i\alpha}$. נקבל

$$f(z) = e^{(\cos \phi - i \sin \phi)/r} = e^{\ln |c| + i\alpha},$$

ולכן $\sin \phi = -r\alpha, \cos \phi = r \ln |c|$. מכאן $\tan \phi = -\alpha / \ln |c|$ ותוך שימוש בזהות $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ נקבל $r^2 = 1/(\alpha^2 + \ln^2 |c|)$. נשיב לב כעת כי ניתן להוסיף כפולה שלמה של 2π ל α מבלי לשנות את c וע"י כך לקבל סדרת נקודות $z_k = r_k e^{i\phi}$ כאשר

$$r_k = 1/\sqrt{(\alpha + 2\pi k)^2 + \ln^2 |c|}, k = 0, 1, 2, \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} z_k = 0 \text{ ש כך } f(z_k) = c \neq 0$$

(ג) הוכיחו כי אם $z = z_0$ קוטב מסדר n של פונקציה אנליטית $f(z)$ בסביבה מנוקבת של z_0 אז $z = z_0$ קוטב מסדר $n + 1$ של $f'(z)$.
 נרשום $f(z) = \varphi(z)/(z - z_0)^n$ כאשר $\varphi(z)$ אנליטית בסביבת z_0 ו $\varphi(z_0) \neq 0$ נגזור כעת את f ונקבל

$$f'(z) = \frac{\varphi'(z)}{(z - z_0)^n} - \frac{n\varphi(z)}{(z - z_0)^{n+1}} =$$

$$= \frac{\varphi'(z)(z - z_0) - n\varphi(z)}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^{n+1}},$$

כאשר $\psi(z) = \varphi'(z)(z - z_0) - n\varphi(z)$ אנליטית בסביבת z_0 ו $\psi(z_0) = -n\varphi(z_0) \neq 0$