

**הגדרה:**  $\epsilon_{machine}$  – שגיאה יחסית:

- בתקן *float*:  $|\epsilon_{machine}| \leq 2^{-23} \sim 1.19 * 10^{-7}$
- בתקן *double*:  $|\epsilon_{machine}| \leq 2^{-52} \sim 2.22 * 10^{-16}$

**למשל –**לחשב את  $x + 1 - 1$  אם  $x < \epsilon_{machine}$  אז  $x + 1 = 1$ .**תרגיל:**

האם החלפת סדר האיברים בסכום יכולה לתת תוצאה שונה ע"י חישוב מקורב? אם כן הוכח וחשב את  $1,000,000 + 1,000,000$  ב-2 דרכים שונות כשידוע שבמחשב ניתן לשמור עד 6 ספרות במנטיסה.

**פתרון:**

כן. 2 הדרכים הן –

$$1) 10^6 + 10^6 = 2,000,000 = 2 * 10^6$$

$$2) 10^6 + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{1,000,000 \text{ פעמים}} \Rightarrow 1,000,000 + 1 = 1,000,001$$

כעת נשים לב כי המספר 1,000,001 תופס 7 מקומות במנטיסה, כאשר למחשב יש רק 6 מקומות במנטיסה. לכן המחשב ישמור אותו בתור 1,000,000. אם נמשיך את פעולה זו של חיבור 1 כל הזמן במשך  $10^6$  פעמים אז נקבל בסה"כ שהמחשב ישמור את החיבור של הכול בתור 1,000,000.



שגיאת קירוב

תזכורת: תהא  $f$  פונקציה גזירה  $n + 1$  פעמים ברציפות בקטע  $[x_0, x]$ . אזי טור טיילור מסביב לנקודה  $x_0$  הוא –

$$f(x) = \sum_{i=1}^N f^{(i)}(x_0) * \frac{(x - x_0)^i}{i!} + R_{N+1}(x)$$

כאשר –

$$R_{N+1}(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} * x^{N+1}$$

כאשר  $x_0 \leq c \leq x$ .

תרגיל:

קרבו את הפונקציה  $e^{2x}$  ע"י טור טיילור עד סדר 2 סביב  $x_0 = 1$  בקטע  $[1,10]$ .

פתרון:

$$f(x) = \sum_{i=0}^2 f^{(i)}(1) * \frac{(x-1)^i}{i!} + R_3(x)$$

$$f(x) = e^{2x} \Rightarrow f'(x) = 2e^{2x} \Rightarrow f''(x) = 4e^{2x} \Rightarrow f^{(3)}(x) = 8e^{2x} \dots (f^{(i)}(x) = 2^i e^{2x})$$

לכן –

$$f(x) \approx e^2 + \frac{2e^2(x-1)}{1!} + \frac{4e^2(x-1)^2}{2!} + R_3(x)$$

$$R_3(x) = \frac{8e^{2c}(x-1)^3}{3!}$$

מאחר ו-  $1 \leq x \leq 10$  אז גם -  $1 \leq c \leq 10$  ונוכל לחסום את השגיאה –

$$|R_3(x)| \leq \frac{8e^{20} * 9^3}{6}$$

שגיאה מתפשטת

הגדרה: שגיאה מתפשטת זה חישוב שגיאה **בפלט** כשגיאה המושפעת מהקלט.

תזכורת:

- שגיאה מוחלטת -  $\Delta x = |x - x^*|$
- שגיאה יחסית -  $\delta_x = \left| \frac{\Delta x}{x} \right|$

נוסחה לשגיאה: בהינצן פונקציה  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u(x_1, \dots, x_n)$  סקלרית אזי -

- שגיאה מתפשטת מוחלטת -

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| * \Delta x_i$$

- שגיאה מתפשטת יחסית -

$$\delta_u = \frac{\Delta u}{u} = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| * \Delta x_i}{u}$$

החסם לשגיאה המוחלטת:

$$\Delta u \leq \max_{1 \leq i \leq n} \left( \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| * \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

תרגיל:

מהו חסם לשגיאה המתפשטת המוחלטת והיחסית של נפח כדור -

$$v(R, \pi) = \frac{4\pi R^3}{3}, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

כאשר  $\pi^* = 3.14$  (ערך מקורב של  $\pi$ ), נניח כי  $\pi = 3.14159$ . עוד אנו יודעים כי -  $R^* = 5.3$

(ערך מקורב של  $R$ ) וגם -  $\Delta R = 0.05$ .

פתרון:

נמצא את השגיאה היחסית של  $\pi$ :

$$\Delta \pi = |\pi - \pi^*| = |3.14159 - 3.14| = 0.0016$$

עוד אנו יודעים כי -

$$\Delta R = |R - R^*| \Rightarrow R = 5.3 + 0.05 = 5.305$$

נרצה לחסום את -

$$\Delta v = \left| \frac{\partial v}{\partial R} \right| * \Delta R + \left| \frac{\partial v}{\partial \pi} \right| * \Delta \pi$$

נחשב את הנגזרות החלקיות -

הפונקציה:

$$v(R, \pi) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

ולכן (נשתמש בקרובים שידועים לנו לחישוב הנגזרות החלקיות) -

$$\left| \frac{\partial v}{\partial R} \right| = |4\pi R^2|_{(5.3, 3.14)} = 4 * 3.14 * (5.3)^2 = 352.81$$

$$\left| \frac{\partial v}{\partial \pi} \right| = \left| \frac{4R^3}{3} \right|_{(5.3, 3.14)} = \frac{4 * 5.3^3}{3} = 198.5$$

ולכן -

$$\Delta v = \left| \frac{\partial v}{\partial R} \right| * \Delta R + \left| \frac{\partial v}{\partial \pi} \right| * \Delta \pi = 352.81 * 0.05 + 198.5 * 0.0016 = 17.96$$

ומכאן נגיע לשגיאה המתפשטת היחסית -

$$\delta_v = \frac{\Delta v}{v(5.305, 3.14159)} = \frac{17.96}{623.61} \approx 0.0288$$

■

מספר מצב (Condition Number)

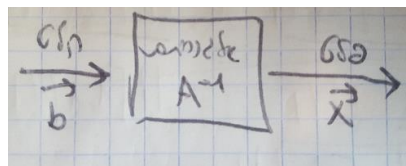
נשים לב לשתי מערכות של משוואות –

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1.01y = 2.01 \end{cases} \Rightarrow x = y = 1, \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 1.01y = 2.02 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 2$$

נשים לב כי שתי משוואות אלו מאוד דומות אבל נשים לב שפתרון הוא מאוד שונה אחד מהשני. נרשום בצורת מטריצות –

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.01 \end{bmatrix}, A\vec{x} = \vec{b}$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$



**הבעיה:** למצוא  $\vec{x}$  כך ש-  $A\vec{x} = \vec{b}_1$ . קיימת אי-וודאות לגבי ערכו של  $b_1$ .

**מסקנה:** אי אפשר למצוא ערך מקורב של  $\vec{x}$  כי אם במקום  $\vec{b}_1$  נציב ווקטור אחר כקירוב ל- $\vec{b}_1$ , למשל  $\vec{b}_2$ , נקבל  $\vec{x}$  שזה פתרון שונה לחלוטין.

לבעיות אלו קוראים *ill-conditioned*, לא מוצגת היטב או אלגוריתם "חולה". במקרה של אלגוריתם "חולה" צריך להכניס נתונים מדויקים יותר או לשפר את האלגוריתם.

$C.N$  (condition number) נותן הערכה פי כמה השגיאה בפלט גדולה מהשגיאה בקלט!

$$C = \left| \frac{\delta_{\text{פלט}}}{\delta_{\text{קלט}}} \right|$$

מספר מצב של פונקציה גזירה

$$\begin{aligned} C(x) &= \left| \frac{\delta_y}{\delta_x} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{\Delta f}{f}}{\frac{\Delta x}{x}} \right| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\frac{f(x+h) - f(x)}{f(x)}}{\frac{x+h-x}{x}} \right| = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| * \left| \frac{x}{f(x)} \right| =_{\text{אם } f \text{ גזירה}} \left| \frac{f'(x) * x}{f(x)} \right| \end{aligned}$$

ולכן –

$$C(x) = \left| \frac{f'(x) * x}{f(x)} \right|$$

**מסקנה:** אם  $c$  גדול מאוד אזי שגיאה קטנה בקלט יכולה להוביל לשגיאה גדולה בפלט!

$$\delta_{f(x)} \approx C * \delta_x$$

אם  $C \equiv 1$  אז  $\delta_{f(x)} \approx \delta_x$ , ומכאן שגיאה יחסית בפלט כגודל השגיאה היחסית בקלט.

אם  $f \equiv 1$ , אז לכל  $h$  -  $f(x+h) - f(x) = 0$ , ומכאן  $\delta_f = 0$ . לכן, לכל שגיאה יחסית בקלט, הפלט יהיה מדויק.

אם  $C \gg 1$  (גדול ממש מ-1) אז הבעיה של לחשב את  $f(x)$  היא לא מוצגת היטב (אם  $C$  עד 10 אז זה בסדר).

**מספר מצב של פונקציה בנקודה  $x$ :**

ברצוננו לחשב את  $f_1(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ,  $f_2(x) = \frac{(3x^4-10)^2}{12}$  נחתכות ב-  $x = \sqrt{2}$ .  
ונרצה לקבוע באיזו פונקציה עדיף להשתמש מבחינת שגיאה מתפשטת.  
ענה על השאלה הזאת במונחים של מספר מצב. נחשב את  $C(\sqrt{2})$  של שתי הפונקציות ונבחר בפונקציה בעלת  $C$  הנמוך יותר.

**פתרון:**

נחשב את פונקציות מספרי המצב של  $f_1, f_2$ :

$$C_1(x) = \left| \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} * x \right| = \left| \frac{-\frac{2x}{(x^2+1)^2} * x}{\frac{1}{x^2+1}} \right| = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

$$C_2(x) = \left| \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} * x \right| = \left| \frac{\frac{2(3x^4-10) * 12x^3}{12}}{\frac{(3x^4-10)^2}{12}} \right| = \frac{24x^4}{3x^4-10}$$

נציב  $x = \sqrt{2}$ :

$$C_1(\sqrt{2}) = \frac{2 * 2}{2 + 1} = \frac{4}{3}$$

$$C_2(\sqrt{2}) = \frac{24 * 2^2}{3 * 2^2 - 10} = 48$$

מתקיים כי  $C_1(\sqrt{2}) < C_2(\sqrt{2})$  ולכן נבחר את  $f_1$  מבחינת הפחתת השגיאה המתפשטת.

נחשב -

$$f_1(\sqrt{2}) = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$

■

**תרגיל:**

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

נחשב מספר מצב של הפונקציה בנקודות -

$$x_0 = 2, x_1 = 1.1, x_2 = 1.01, x_3 = 1.0001$$

**פתרון:**

נשים לב כי לפונקציה יש אסימפטוטה אנכית בנקודה -  $x = 1$ . נחשב את פונקציית מספר המצב -

$$C(x) = \left| \frac{-\frac{1}{(1-x^2)^2} * x}{\frac{1}{1-x}} \right| = \left| \frac{x}{1-x} \right|$$

נחשב -

$$C(2) = \left| \frac{2}{1-2} \right| = 2$$

$$C(1.1) = \left| \frac{1.1}{(1-1.1)} \right| = 11$$

$$C(1.01) = \left| \frac{1.01}{1-1.01} \right| = 101$$

$$C(1.0001) = \left| \frac{1.0001}{1-1.0001} \right| = 10,001$$

ונשים לב שככל שניקח נקודה קרובה יותר ל-1, מספר המצב ממשיך לגדול, וזה נובע מהסינגולריות של הפונקציה בנקודה -  $x = 1$ .

■