תזכורת

יהי (X,d) מ"מ.

$A\subseteq X$ נקראת פתוחה אם לכל $x\in A$ קיים $\epsilon>0$ כך ש$x\in B(x,\epsilon)\subseteq A$

טענה

יהי (X,d) מ"מ. (A,d_A) תת מרחב מטרי.

U פתוחה בA $\Leftrightarrow$ $U=V\cap A$ עבור V פתוחה בX.

תרגיל

יהי (A,d_A) ת"מ מטרי של (X,d) ותהי $V\subseteq X$ קבוצה המקיימת $V\cap A$ פתוחה בA. האם בהכרח V פתוחה בX?

תשובה

לא! דוגמה נגדית:

נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת מרחב $A=(0,1)$.

$V=[-1,2]$, V אינה פתוחה ב$\mathbb{R}$.

$V\cap A=A$ פתוחה בA.

תרגיל

נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובת"מ $A=[0,2]$. האם $U=(1,2]$ פתוחה ב$\mathbb{R}$?

פתרון

U לא פתוחה ב$\mathbb{R}$, כי לכל $\epsilon>0$, $U\not\supseteq B(2,\epsilon)\ni 2+\frac{\epsilon}{2}$.

U כן פתוחה בA: $U=A\cap(1,3)$, וU פתוחה ב$\mathbb{R}$.

תרגיל

האם הקבוצות הבאות פתוחות ב$\mathbb{R}^2$?

א. $E=\{(x,y)|0\leq x\leq 5\}$

$E\not\supseteq B((0,0),\epsilon)_\epsilon\forall$ לכן E אינה פתוחה.

ב. $D=\{(x,y)|xy<1\}$

$$D=\left\{(x,y)\middle|x>0\wedge y<\frac{1}{x}\right\}$$

$$U\left\{(x,y)\middle|x<0\wedge y>\frac{1}{x}\right\}$$

$$U\{(0,y)|y\in\mathbb{R}\}$$

לכל $(x_0,y_0)\in D$ קיים מרחק מינימלי לענפי ההיפרבולה מתקיים $B((x_0,y_0),\epsilon)\subseteq D$.

הגדרה(קבוצה סגורה)

יהי M מ"מ.
$S\subseteq M$ תיקרא סגורה אם S^c פתוחה.

הערה: סגורה $\neq$ לא פתוחה.

לכל סדרה $\{x_{+n}\}_{n=1}^{\infty}\subseteq A$ השואפת לx מתקיים $x\in A$.

דוגמה

נתבונן בסדרה $A=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ כתת קבוצה של $\mathbb{R}$. A אינה סגורה ב$\mathbb{R}$ כי $A\not\ni 0\leftarrow\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\subseteq A$

אם נסתכל על תת המרחב $(0,\infty)$, אז A סגורה ב$(0,\infty)$, שכן מכילה כל נקודות הגבול שלה[1] במרחב זה.

הגדרה(רציפות בנקודה)

יהיו (X,d), (Y,ρ) שני מ"מ.
נאמר ש$f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה ב$a\in X$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d(x,a)<\delta$ אזי $\rho(f(x),f(a))<\epsilon$.

הגדרה שקולה במונחי כדורים

יהיו (X,d), (Y,ρ) שני מ"מ.
נאמר ש$f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה ב$a\in X$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $x\in B_d(a,\delta)$ אזי $f(x)\in B_\rho(f(a),\epsilon)$
(או $f(B_d(a,\delta))\subseteq B_\rho(f(a),\epsilon)$)

[1] כלומר נקודות שאפשר לבנות סדרות מתוך אברי A שמתכנסות אליה - למשל 1 היא נקודת גבול עבור הסדרה $1,1,1,1,\ldots$

תרגיל

יהיו $(\mathbb{R},|\cdot|)$, $(\mathbb{R}^n,d_{\max})$ שני מ"מ. תהי $P_1\left(\mathbb{R}^n,d_{\max}\right)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ העתקת ההטלה על הרכיב הראשון. הוכיחו שP_1 רציפה.

הוכחה

נוכיח רציפות לכל $a=(a_1,...a_n)$.
צ"ל שלכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $d_{\max}(x,a)<\delta$ אזי $|x_1-a_1|=|P_1(x)-P_1(a)<\epsilon|$.
מתקיים:

$$|x_1-a_1|\le\max_{1\le i\le n}|x_i-a_i|=d_{\max}(x,a)\qquad(*)$$

יהי $\epsilon>0$. ניקח $\delta=\epsilon$. נניח $d_{\max}(x,a)<\delta$. מ$(*)$ נקבל ש$|x_1-a_1|\le\delta=\epsilon$

משפט

יהיו X,Y מ"מ.
$f:X\to Y$ רציפה $\Leftrightarrow$ לכל U פתוחה בY, $f^{-1}(U)$ פתוחה בX.

הערה: המשפט נשאר נכון אם מחליפים "פתוחה" ב"סגורה".

תרגיל

יהי (X,d_1),(X,d_2)שני מ"מ. הוכיחו שמתקיים $\mathrm{Id}:(X,d_1)\to(X,d_2)$ רציפה $\Leftrightarrow$ לכל U פתוחה ב(X,d_2) מתקיים שU פתוחה ב(X,d_1)

פתרון

$\Leftarrow$ ע"פ המשפט $\mathrm{Id}^{-1}(U)$ פתוחה ב(X,d_1). $U=\mathrm{Id}^{-1}(U)$ ולכן U פתוחה ב(X,d_1)

$\Rightarrow$ תרגיל

הגדרה(מטריקות שקולות)

נאמר ששתי מטריקות על X שקולות אם הן מגדירות את אותו האוסף של קב' פתוחות.

הגדרה שקולה(מהתרגיל)

$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{Id}:(X,d_1)\to(X,d_2)\\ \mathrm{Id}:(X,d_2)\to(X,d_1)\end{array}\right.$ רציפות.

תזכורת

$f:(X,d)\to(Y,\rho)$ רציפה ב$a\in X$ $\Leftrightarrow$ לכל $x_n\xrightarrow{d}a$ מתקיים $f(x_n)\xrightarrow{\rho}f(a)$.

הגדרה נוספת שקולה למטריקות שקולות

d,ρ שקולות מעל X $\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} x_n \overset{d}{\to} x \\ \Updownarrow \\ x_n \overset{\rho}{\to} x \end{array}$$

הוכחה

ע"פ התנאי הקודם שהוכחנו, $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Id}:(X,d)\to(X,\rho) \\ \mathrm{Id}:(X,\rho)\to(X,d) \end{array}\right.$ רציפות.

ע"פ היינה,

$$x_n \overset{d}{\to} x \Rightarrow \begin{array}{ccc} \mathrm{Id}\left(x_n\right) & \overset{\rho}{\to} & \mathrm{Id}\left(x\right) \\ || & & || \\ x_n & \overset{\rho}{\to} & x \end{array}$$

מרציפות (2)נקבל $x_n \overset{d}{\to} x \Leftarrow x_n \overset{\rho}{\to} x$

תרגיל

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נגדיר את הגרף של f:

$$\mathrm{Gr}_f := \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| y=f\left(x\right)\right\}$$

הוכיחו כי Gr_f קבוצה <u>סגורה</u> ב$\mathbb{R}^2$ לכל f רציפה.

פתרון

תהי $\mathrm{Gr}_f \supseteq \left\{(x_n,y_n)\right\}_{n=1}^{\infty} \xleftarrow{d_{\max}} (x,y)$. נוכיח ש$(x,y)\in\mathrm{Gr}_f$.

$$(x_n,y_n) \xrightarrow{d_{\max}} (x,y)$$

מרציפות P_1(ההטלה על הרכיב הראשון) נקבל

$$x_n = P_1\left(x_n,y_n\right) \xrightarrow{|\cdot|} P_1\left(x,y\right)=x$$

באופן דומה מרציפות P_2 נקבל $y_n \xrightarrow{|\cdot|} y$.

$x_n \xrightarrow{|\cdot|} x$ וכן f רציפה ולכן $f\left(x_n\right) \xrightarrow{|\cdot|} f\left(x\right)$.

$\forall_n \left(x_n,y_n\right)\in\mathrm{Gr}_f$ ולכן $\forall_n f\left(x_n\right)=y_n$.

הגבול במ"מ הוא יחיד(משפט) ולכן $y=f\left(x\right)$, כלומר $(x,y)\in\mathrm{Gr}_f$. לכן Gr_f קבוצה סגורה.

תרגיל

כדור סגור במרחב מטרי הוא קבוצה סגורה.

הוכחה

נוכיח ש$(B[a,r])^c$ פתוחה.

יהי $x \in (B[a,r])^c$. מתקיים $d(x,a) > r$. ניקח $\epsilon = d(x,a) - r$. נראה ש$x \in B(x,\epsilon) \subseteq (B[a,r])^c$.

יהי $y \in B(x,\epsilon)$, לכן $d(x,y) < \epsilon$.

$$d(x,y) < \epsilon = d(x,a) - r$$

$$\Downarrow$$

$$r < d(x,a) - d(x,y) \qquad (*)$$

$$d(x,a) \leq d(y,a) + d(x,y)$$

מכאן

$$d(x,a) - d(x,y) \leq d(y,a)$$

ולכן מ$(*)$

$$r < d(x,a) - d(x,y) \leq d(y,a)$$

כלומר $r < d(y,a)$ ומכאן $y \in (B[a,r])^c$.

לכן $(B[a,r])^c$ פתוחה ו$B[a,r]$ סגורה.