מבוא לטופולוגיה - תרגיל 12 (פתרון)

<u>שאלה 1</u>

יהי (M_1, d_1) , (M_2, d_2) מרחבים מטריים.

ראינו בכיתה שהפונקציה $d: M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי נוסחה:

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

מקיימת אקסיומות מטריקה ולכן מאפשרת לראות $(M_1 \times M_2, d)$ כמרחב מטרי.

נסמן ב-τ את הטופולוגיה המושרת בקבוצה $M_1 \times M_2$ על ידי המטרוקה d. הבסיס הטבעי $\mathfrak{B}$ של הטופולוגיה הזאת מורכב מכדורים:

$$\mathfrak{B} = \{B\big((a_1, a_2), r\big) | a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, r > 0\}$$

נסמן ב-$\tau_\times$ טופולוגית המכפלה במרכב $(M_1, d_1) \times (M_2, d_2)$. אחד מהבסיסים הקיימים לטופולוגיה הזאת מורכב ממכפלות:

$$\boldsymbol{\mathfrak{B}_\times = \{B_1(a_1, r_1) \times B_2(a_2, r_2) | a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, r_1, r_2 > 0\}}$$

(כאן $B_1(a_1, r_1), B_2(a_2, r_2)$ כדורים במטריקות d_1, d_2 בהתאם.)

בהשתמש את שני הבסיסים. <u>הוכיחו</u> ש-$\tau = \tau_\times$.

<u>הוכחה</u>

<u>$\tau \subseteq \tau_\times$</u>.

$$B\big((a_1, a_2), r\big) = \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \big| d\big((x_1, x_2), (a_1, a_2)\big) < r\} = \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 | d_1(x_1, a_1) < r \wedge d_2(x_2, a_2) < r\} =$$

$$\{(x_1,x_2)\in M_1\times M_2 | x_1\in B_1(a_1,r)\wedge x_2\in B_2(a_2,r)\} =$$
$$(*)\quad B_1(a_1,r)\times B_2(a_2,r)\in \mathfrak{B}_\times \subseteq \tau_\times$$
לכן $\mathfrak{B}\subseteq\tau_\times$ ואזי $\tau\subseteq\tau_\times$.■

<u>$\tau_\times\subseteq\tau$</u>.

יהי $(a_1,a_2)\in U\in\tau_\times$. אזי קיימים כדורים
$B_1(a_1,r_1)\subseteq M_1$ ו-$B_2(a_2,r_2)\subseteq M_2$ כך ש-
$U\subseteq B_2(a_2,r_2)\times B_1(a_1,r_1)\ni(a_1,a_2)$ כי $\mathfrak{B}_\times$ הוא בסיס של $\tau_\times$ (ההגדרה 2 של בסיס המכפלה).

עכשיו נגדיר: $r=\min\{r_1,r_2\}$ ו-
$$B'=\{(x_1,x_2)\in M_1\times M_2 | d_1(x_1,a_1)<r\wedge d_2(x_2,a_2)<r\}$$
מקבלים (הפירוט אפשר לראות ב-(*)):
$$(a_1,a_2)\in B'=B_1(a_1,r)\times B_2(a_2,r)\subseteq$$
$B_1(a_1,r_1)\times B_2(a_2,r_2)\subseteq U$, כלומר,
$$(a_1,a_2)\in B'\subseteq U$$
וחוץ מזה:
$$B'=B\big((a_1,a_2),r\big)\in\tau$$
אנחנו רואים שהנקודה האקראית $(a_1,a_2)\in U$ היא נקודה פנימית ב-U ביחס לטופולוגיה τ. אזי $U\in\tau$. כלומר, הנחנו ש- $U\in\tau_\times$ וקיבלנו ש-$U\in\tau$. ■

<u>שאלה 2</u>

יהיו Y,X מ"ט ותהי $f:X\to Y$ פונקציה רציפה .הגרף של f הוא תת-מרחב של $X\times Y$ המוגדר באופן הבא: $\Gamma_f=$ $\{(x,f(x))\in X\times Y\}$.

<u>הכיחו</u> ש-X הומאומורפי ל- Γ_f .

הוכחה

נגדיר $g: X \to \Gamma_f$ כך ש-$g(x) = (x, f(x))$.

הפונקציה היא פונקצחה הפיכה:

$g \circ p_X|_{\Gamma_f} = Id_{\Gamma_f}$ ו- $p_X|_{\Gamma_f} \circ g = Id_X$ כאשר p_X היא ההטעלה $p_X: X \times Y \to X$. (קל לבדוק את השוויונות נקודה-נקדה).

$g^{-1} = p_X|_{\Gamma_f}$ רציפה כצמצום של ההטעלה שהיא רציפה (ההרצאות).

נשאר להוכיח ש-g רציפה. לנוחות, במקום g נתבונן בפונקציה $h: X \to X \times Y$ כך ש- $h|^{\Gamma_f} = g$ (צמצום התווח) ונוכיח את רציפותה של h בכל נקודה.

תהי $a \in X$. אז כוון ש-f רציפה, לכל סביבה $V \subseteq Y$ המכילה את $f(a)$ קיימת סביבה $U \subseteq X$ של a כך ש- $f(U) \subseteq V$. קל לבדוק שזה גורר: לכל סביבה $W = U' \times V$ המכילה את $h(a)$ קיימת סביבה $U \subseteq X$ של a כך ש- $h(U) \subseteq W$ (כאן W פתוחה לפי הגדרת טופולוגית המכפלה).

אז h רציפה , g רציפה כי התקבלה בצמצום טווח, ואז היא הומאומורפיזם, מש"ל.

הערה. אפשר גם להסיק את הרציפות של h מרציפותם של רכיביה Id_X ו-f: $h = (Id_X, f)$ (ההרצאות).

שאלה 3

יהיו Y, X מרחבים טופולוגיים ו-Y - מרחב קומפקטי.

א) הוכיחו שההטעלה $p_X: X \times Y \to X$ היא פונקציה סגורה.

<u>הוכחה</u>

תהי $H \subseteq X \times Y$ קבוצה סגורה. נתבונן בנודה כלשהי $x \notin p_X(H)$ ונוכיח שהיא פנימית ב-$p_X(H)^c$. בשביל זה נשים לב ש-

(1) $\quad x \notin p_X(H) \Rightarrow \{x\} \times Y \cap H = \emptyset$

(2) $\quad \{x\} \times Y$ קומפקטי (ההרצאות) .

מ-(1) נובע שלכל $y \in Y$: $(x, y) \notin H$, וכוון ש- H קבוצה סגורה, לכל $y \in Y$ קיימת סביבה $U_y \times V_y$ של הנקודה (x, y) כך ש-

(3) $\quad U_y \times V_y \cap H = \emptyset$.

אז $\{U_y \times V_y\}_{y \in Y}$ כיסוי פתוח של תת-מרחב $\{x\} \times Y$ אשר קומפקטי לפי (2). לכן קימות נקודות $y_1, \dots, y_n \in Y$ כך ש-

$U_{y_1} \times V_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n} \times V_{y_n} \supseteq \{x\} \times Y$ ו-

$U_{y_i} \times V_{y_i} \cap H = \emptyset$ לכל $1 \leq i \leq n$.מזה נובע ש-$Y = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. נקח $U = \cap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. אזי U- פתוחה, $x \in U$ ו-

(4) $\quad U \times Y \cap H = \emptyset$.

זה אומר ש-$U \cap p_X(H) = \emptyset$ (כי אחרת היה קיים זוג $(u, y) \in H$ כך ש-$u \in U$ ו-$y \in Y$ וזה היה סותר ל-(4)).
אז נקודה x פנימית ב-$p_X(H)^c$, מש"ל.

ב) תהי $f: X \to Y$ פונקציה. <u>הוכיחו</u> שאם *הגרף* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ קבוצה סגורה ב-$X \times Y$,
אזי f פונקציה רציפה.

הוכחה

תהי F תת-קבוצה סגורה ב-Y. אזי
$f^{-1}(F) = p_X(\Gamma_f \cap X \times F)$ (קל לבדוק את ההכלה הדו-כיוונית נקודה-נקודה). מכאן: $X \times F$ סגורה כמכפלה של שתי סגורות (תרגיל הבית הקודם). Γ_f סגורה לפי התנאי. אז $\Gamma_f \cap X \times F$ סגורה כחיתוך סגורות. ו-$p_X(\Gamma_f \cap X \times F)$ סגורה לפי "א)". קבלנו: תמונה הפוחה של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה, לכן f – רציפה, מש"ל.

שאלה 4

יהיו $X_1, \dots, X_n$ מ"ט קומפקטיים. הוכיחו שהמרחב $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ קומפקטי.

הוכחה

אפשר לראות את המ"ט $X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$ כ- $\bigcup_{i=1}^{n} X_i'$ כאשר X_i' תת-מרחב הומאומורפי ל-X_i ולכן גם קומפקטי. בנוסף, X_i' - קבוצה פתוחה ב-$X_1 \sqcup \dots \sqcup X_n$.

נשאר להוכיח שאחוד סופי של תת-מרחבים קומפקטיים.

מספיק לעשות את זה לשני מרחבים כי לאחר מכן קל להמשיך לפי אינדוקציה.

יהי $Z = X \bigcup Y$. יהיו X, Y קבוצות קוממקטיות ויהי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של Z . אז הוא גם כיסוי פתוח של X ושל Y (ככיסוי של תת-קבוצות) . לכן הוא מכיל כיסוי פתוח סופי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in F_1}$ של X וכיסוי פתוח סופי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in F_2}$ של Y ($F_1, F_2 \subseteq$

I– קבוצות אינדקסים סופיות) . אזי $\{W_\alpha\}_{\alpha\in F_1\cup F_2\subseteq I}$ תת-כיסוי סופי של Z . לכן Z קומפקטי.
בעזרת אותה לוגיקה מקבלים באינדוקציה ש-
$X_1\sqcup\ldots\sqcup X_n=\dot{\bigcup}_{i=1}^n X_i'$ מ"ט קומפקטי, מש"ל.

<u>שאלה 5</u>
יהיו X,Y,Z מרחבים טופולוגיים. נגדיר יחס '~' על מרחב המכפלה $X\times Y\times Z$ כך ש-$(x,y,z)\sim(x',y',z')\Leftrightarrow x=x'\wedge z=z'$.

<u>הוכיחו:</u>
א) '~' יחס שקילות;
ב) $(X\times Y\times Z)/\sim$ הומאומורפי ל-$X\times Z$.
<u>הוכחה</u>

א) התכונות רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות נבדקות בקלות על ידי בדיקה ישירה.
ב) נוכיח שפונקציה $p\colon X\times Y\times Z\to X\times Z$, המוגדרת על ידי נוסחה $p(x,y,z)=(x,z)$, מכבדת מאד את היחס '~':

$$(x,y,z)\sim(x',y',z')\Leftrightarrow x=x'\wedge z=z'\Leftrightarrow$$
$$(x,z)=(x',z')$$

אבל $(x,z)=p(x,y,z)$ ו- $(x',z')=p(x',y',z')$.
לכן: $(x,y,z)\sim(x',y',z')\Leftrightarrow p(x,y,z)=p(x',y',z')$
נסמן ב-ρ את העתקה הקנונית
$\rho\colon X\times Y\times Z\to X\times Y\times Z/\sim$. מכוון ש-p <u>מכבדת מאד</u> את ~, לפי ההרצאה האחרונה , קיימת פונקציה
$\hat{p}\colon X\times Y\times Z/\sim\to X\times Z$ כך ש-$p=\hat{p}\circ\rho$ כאשר
$\hat{p}$ – חח"ע ועל.
אם U פתוחה ב-X, V פתוחה ב-Y ו- W פתוחה

ב- Z, אזי $p(U \times V \times W) = U \times W$ פתוחה
ב - $X \times Z$, ו- $p^{-1}(U \times W) = U \times Y \times W$ פתוחה ב-$X \times Y \times Z$.

לפי הגדרת טופולוגית המכפלה ולפי כמה משפטים מההרצאות לגבי בסיס, זה מוכיח ש- p פונקציה רציפה ופתוחה. לפי משפט מההרצאה גם $\hat{p}$ רציפה.

נוכיח ש-$\hat{p}$ פתוחה. תהי $\hat{T} \subseteq X \times Y \times Z/\sim$ פתוחה במרחב המנה. אזי $T = \rho^{-1}(\hat{T})$ פתוחה
ב-$X \times Y \times Z$. לכן $p(T) = \hat{p}\left(\rho(T)\right) = \hat{p}(\hat{T})$ פתוחה כי הוכחנו ש-p פתוחה. אז $\hat{p}$ פתוחה, רציפה, חח"ע ועל. אזי $\hat{p}$ הומאומורפיזם, מש"ל.