

תרגיל. נביט במרחב המכפלה הפנימית $V = \mathbb{R}^2$ עם המכפלה הפנימית הבאה

$$\langle v, w \rangle = v^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} w$$

ונביט באופרטור $T : V \rightarrow V$ המוגדר על ידי

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4y \\ a^2x - 3ay \end{pmatrix}$$

עבור $a \in \mathbb{R}$ פרמטר.

מצאו את כל ערכי הפרמטר a עבורם האופרטור T נורמלי, הרמיטי, אוניטרי.

2

פתרון:

הצגנו פתרון פשוט בעזרת דרישה לכך שהו"ע יהיו מאונכים (שהרי נורמלי שקול ללכסין אוניטרית כאשר הפולינום האופייני מ"ל). כאן נבצע את הפתרון בדרך הארוכה ע"י המטריצה המייצגת לפי בסיס א"נ.

ראשית לצורך הנוחות נחשב את המכפלה הפנימית באופן כללי:

$$\begin{aligned} \langle (a, b), (c, d) \rangle &= (a \ b) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (a + b \quad a + 10b) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (a + b)c + (a + 10b)d = \\ &= ac + bc + ad + 10bd \end{aligned}$$

כעת ניקח בסיס כלשהו למרחב

$$\{v_1 = (1, 0), v_2 = (0, 1)\}$$

ונבצע תהליך גרם שמידט

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (0, 1) - \frac{\langle (0, 1), (1, 0) \rangle}{\langle (1, 0), (1, 0) \rangle} (1, 0) = (0, 1) - \frac{1}{1} (1, 0) = (-1, 1)$$

נבדוק:

$$\langle (1, 0), (-1, 1) \rangle = -1 + 1 = 0$$

כעת ננרמל את הוקטורים

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{w_1}{\sqrt{\langle w_1, w_1 \rangle}} = \frac{(1, 0)}{\sqrt{\langle (1, 0), (1, 0) \rangle}} = (1, 0)$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{w_2}{\sqrt{\langle w_2, w_2 \rangle}} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{\langle (-1, 1), (-1, 1) \rangle}} = \frac{(-1, 1)}{\sqrt{1 - 1 - 1 + 10}} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

נסמן את הבסיס הא"נ לפי המכפלה הפנימית הזו

$$B = \{u_1, u_2\}$$

ונרצה למצוא את

$$[T]_B$$

נפעיל את ההעתקה על איברי הבסיס

$$Tu_1 = T(1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix}$$

$$Tu_2 = \frac{1}{3}T(-1,1) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -a^2 - 3a \end{pmatrix}$$

כעת נרצה למצוא את הקואורדינטות של התמונות הללו לפי הבסיס B . נמצא קואורדינטות באופן כללי:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{3} & x \\ 0 & \frac{1}{3} & y \end{array} \right) \xrightarrow{R_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+y \\ 0 & \frac{1}{3} & y \end{array} \right) \xrightarrow{3R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 3y \end{array} \right)$$

כלומר

$$\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} x+y \\ 3y \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} a^2 \\ 3a^2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ -a^2 - 3a \end{pmatrix} \right]_B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 - a^2 - 3a \\ -3a^2 - 9a \end{pmatrix}$$

כלומר

$$[T]_B = \begin{pmatrix} a^2 & \frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a \\ 3a^2 & -a^2 - 3a \end{pmatrix}$$

וכעת נבדוק את הנורמליות:

$$[T^*]_B = ([T]_B)^* = \begin{pmatrix} a^2 & 3a^2 \\ \frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a & -a^2 - 3a \end{pmatrix}$$

נדרוש כי

$$[T]_B [T^*]_B = [T^*]_B [T]_B$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} a^2 & \frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a \\ 3a^2 & -a^2 - 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a & 3a^2 \\ \frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a & -a^2 - 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a & 3a^2 \\ \frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a & -a^2 - 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^2 & \frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a \\ 3a^2 & -a^2 - 3a \end{pmatrix}$$

כלומר נדרוש

$$\begin{pmatrix} a^4 + \left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right)^2 & 3a^4 + \left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right)(-a^2 - 3a) \\ 3a^4 + \left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right)(-a^2 - 3a) & 9a^4 + (-a^2 - 3a)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^4 + 9a^4 & a^2\left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right) + 3a^2(-a^2 - 3a) \\ a^2\left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right) + 3a^2(-a^2 - 3a) & \left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right)^2 + (-a^2 - 3a)^2 \end{pmatrix}$$

זה שקול לשלוש המשוואות הבאות

$$a^4 + \left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right)^2 = a^4 + 9a^4$$

$$3a^4 + \left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right)(-a^2 - 3a) = a^2\left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right) + 3a^2(-a^2 - 3a)$$

$$9a^4 + (-a^2 - 3a)^2 = \left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right)^2 + (-a^2 - 3a)^2$$

מהמשוואה הראשונה

$$9a^4 = \left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right)^2$$

נוציא שורש ולכן

$$3a^2 = \pm \left(\frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a\right)$$

נפתור את שתי המשוואות ונקל ממש על החיים!

$$3a^2 = \frac{4}{3} - \frac{a^2}{3} - a$$

$$9a^2 = 4 - a^2 - 3a$$

$$10a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 160}}{20} = \frac{-3 \pm 13}{20} = \frac{1}{2}, -\frac{4}{5}$$

האפשרות השנייה היא

$$3a^2 = -\frac{4}{3} + \frac{a^2}{3} + a$$

$$9a^2 = -4 + a^2 + 3a$$

$$8a^2 - 3a + 4 = 0$$

$$a_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16 \cdot 8}}{16}$$

ולכן אין פתרונות ממשיים למשוואה זו.

סה"כ נשארו עם שני ערכים עבורם ייתכן כי ההעתקה נורמלית (והרי זו דרישת סף לאוניטריות ולהרמיטיות).

נבדוק מה קורה בשני מקרים אלה:

$$a = \frac{1}{2} \text{ עבור}$$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{4}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} - \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{16}{12} - \frac{1}{12} - \frac{6}{12} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} - \frac{6}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{7}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

זו מטריצה הרמיטית ולכן T הרמיטית ונורמלית במקרה זה.

$$a = -\frac{4}{5} \text{ עבור}$$

$$\begin{aligned} [T]_B &= \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{4}{3} - \frac{16}{75} + \frac{4}{5} \\ \frac{48}{25} & -\frac{16}{25} + \frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{100}{75} - \frac{16}{75} + \frac{60}{75} \\ \frac{12}{25} & -\frac{16}{25} + \frac{60}{25} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{144}{75} \\ \frac{48}{25} & \frac{44}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{25} & \frac{48}{25} \\ \frac{48}{25} & \frac{44}{25} \end{pmatrix} = \frac{4}{25} \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} = \frac{8}{25} \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

וגם זו מטריצה הרמיטית (כי היא ממשית וסימטרית).

סה"כ ההעתקה נורמלית אם ורק אם היא הרמיטית אם ורק אם $a = \frac{1}{2}$ או $a = -\frac{4}{5}$

לגבי אוניטריות, העתקה צריכה להיות כמובן נורמלית, ומהחישובים לעיל גם הרמיטיות, ולכן צריך להתקיים כי

$$T^* = T$$

$$T^* = T^{-1}$$

$$T^2 = I$$

קל לחשב ולוודא כי

$$\left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\right)^2 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 10 & 24 \\ 24 & 58 \end{pmatrix} \neq I$$

$$\left(\frac{8}{25}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}\right)^2 = \left(\frac{8}{25}\right)^2\begin{pmatrix} 40 & 78 \\ 78 & 157 \end{pmatrix} \neq I$$

כלומר ההעתקה לעולם אינה אוניטרית.

תודה ויום טוב.