<u>אלגברה לינארית 1 למדעי המחשב (89112)</u>
<u>בחינת סיום (מועד א – פתרונות מקוצרים)</u>

<u>מרצים:</u> פרופ' ר. עדין, פרופ' א. רזניקוב.
<u>משך הבחינה:</u> **3** שעות (**לאחר הארכה**).
<u>הנחיות:</u> יש לפתור את <u>כל</u> **3** השאלות. (הציון המקסימאלי הוא 100)
אין להשתמש בחומר עזר, גם לא במחשבון.
<u>נא כתבו פתרונות רק בטופס המצורף</u>. **<u>המחברת לא תיבדק</u>** והיא רק לטיוטה.

בהצלחה!

1. **שימו לב: סטודנטים רבים טעו בשאלה זו באופן החישוב של המרחב הנפרש ($span$) ע"י כמה וקטורים ובחישוב החיתוך של שני תת-מרחבים. נא ללמוד היטב נושאים אלו.**
$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2\in V$ אם ורק אם $p(1)=a_0+a_1+a_2=0$ וגם $p(-1)=a_0-a_1+a_2=0$.
הפתרון הכללי למערכת שתי המשוואות ההומוגניות הללו הוא $(a_0,a_1,a_2)=(-t,0,t)=t(-1,0,1)$ כאשר $t\in\mathbb{R}$, ולכן $V=span\{1-x^2\}$ ($\dim V=1$).
מצד שני $W=span\{1+x-x^2,(1-\varepsilon)x\}$. לכן, עבור $\varepsilon=1$: $W=span\{1+x-x^2\}$ ($\dim W=1$), ואילו עבור $\varepsilon\neq 1$: $W=span\{1+x-x^2,x\}=span\{1-x^2,x\}$ ($\dim W=2$).
לגבי החיתוך $V\cap W$: עבור $\varepsilon\neq 1$ מתקיים $V\subseteq W$, ולכן $V\cap W=V$ ($\dim(V\cap W)=1$). עבור $\varepsilon=1$ מתקיים $V\neq W$ (כי $1-x^2,1+x-x^2$ בת"ל), ולכן $V\cap W$ הוא חיתוך שני תת-מרחבים חד-ממדיים שונים, כלומר $V\cap W=\{0\}$. מכאן מתקבלות התשובות הבאות:
   א. <u>לא נכון:</u> $\dim V=\dim W$ רק עבור $\varepsilon=1$.
   ב. <u>לא נכון:</u> $V\cap W=\{0\}$ רק עבור $\varepsilon=1$.
   ג. <u>נכון:</u> $\dim(V\cap W)=1$ לכל $\varepsilon\neq 1$.
   ד. <u>לא נכון:</u> תמיד $V+W=span\{1-x^2,x\}\neq U$. (בדרך אחרת: כדי שהסכום $V+W$ יהיה ישר צריך $V\cap W=\{0\}$, וזה קורה כאמור רק עבור $\varepsilon=1$, ואז רואים שמתקיים $\dim(V+W)=2$.)

2.
   א. <u>פתרון א:</u> קל לבדוק שאברי S מקיימים $tr(A)=0$, כלומר $S\subseteq U$. כדי לבדוק פרישה נרשום משוואה $a\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}\\\bar{0}&\bar{2}\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{0}\\\bar{1}&\bar{1}\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}\bar{2}&\bar{1}\\\bar{0}&\bar{1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&w\\z&y\end{pmatrix}$ ונפתור עבור הנעלמים c,b,a. דירוג קנוני של המערכת $\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{2}&\bar{2}&x\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&w\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&z\\\bar{2}&\bar{1}&\bar{1}&y\end{pmatrix}$ נותן $\begin{pmatrix}\bar{1}&\bar{0}&\bar{0}&x+z+w\\\bar{0}&\bar{1}&\bar{0}&z\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{1}&w\\\bar{0}&\bar{0}&\bar{0}&x+y\end{pmatrix}$, ורואים שאם $x+y=0$ אז אין שורת סתירה וקיים פתרון. לכן $span(S)=U$. כמו כן תמיד (ובפרט אם $x=y=z=w=0$) הפתרון יחיד, ולכן S בת"ל. לכן S בסיס של U (לפי הגדרת בסיס).

<u>פתרון ב:</u> במקום לבדוק פרישה וגם אי-תלות לינארית אפשר להשתמש במשפט "השלישי חינם", ולבדוק <u>רק</u> אי-תלות לינארית (או רק פרישה) יחד עם $|S|=\dim(U)$. כמובן $S\subseteq U$ (בדיקה!), $|S|=3$. U הוא מרחב הפתרונות של משוואה לינארית הומוגנית אחת ($x+y=0$) ב-4 נעלמים (x,y,z,w), ולכן $\dim(U)=3$, כלומר $\dim(U)=|S|$. את אי-התלות הלינארית של S אפשר לבדוק כמו בדרך הקודמת (כתיבה <u>בעמודות</u>), עם דירוג רק עבור $x=y=z=w=0$ ובדיקה שיש פתרון יחיד (כלומר אין משתנים חפשיים); או ע"י כתיבה <u>בשורות</u>, בצורה $\begin{pmatrix}\bar1&\bar0&\bar0&\bar2\\ \bar2&\bar0&\bar1&\bar1\\ \bar2&\bar1&\bar0&\bar1\end{pmatrix}$, ובדיקה שבדירוג לא מתקבלת שורת אפסים. בכל מקרה, ממשפט "השלישי חינם" נובע ש- S בסיס של U.

ב. למערכת

$$a\begin{pmatrix}\bar1&\bar0\\ \bar0&\bar2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}\bar2&\bar0\\ \bar1&\bar1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}\bar2&\bar1\\ \bar0&\bar1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar2&\bar2\\ \bar1&\bar1\end{pmatrix}$$

כלומר

$$\begin{cases}a+\bar2b+\bar2c=\bar2\\ \qquad\qquad c=\bar2\\ \qquad b\qquad=\bar1\\ \bar2a+b+\ c=\bar1\end{cases}$$

יש פתרון יחיד $(a,b,c)=(\bar2,\bar1,\bar2)$, ולכן $[C]_S=\begin{pmatrix}\bar2\\ \bar1\\ \bar2\end{pmatrix}$.

ג. $D=\bar1\begin{pmatrix}\bar1&\bar0\\ \bar0&\bar2\end{pmatrix}+\bar2\begin{pmatrix}\bar2&\bar0\\ \bar1&\bar1\end{pmatrix}+\bar1\begin{pmatrix}\bar2&\bar1\\ \bar0&\bar1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar1&\bar1\\ \bar2&\bar2\end{pmatrix}$.

3.

א. $AB=0$, ולכן כל עמודה x של B מקיימת $Ax=0$. לכן גם $(BA)x=B(Ax)=0$. אם ל- B יש עמודה שונה מווקטור האפס, סיימנו; ואם לא, אז בהכרח $B=0$ ולכן $(BA)x=0$ לכל x.

ב. <u>לא נכון.</u> דוגמא נגדית: $B=\begin{pmatrix}0&0\\ 1&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&0\\ 0&0\end{pmatrix}$.

<u>הערה:</u> הטענה נכונה אם $n=1$ (מדוע?).

ג. <u>פתרון א:</u> כידוע תמיד $tr(AB)=tr(BA)$, ולכן אצלנו $m=tr(I_m)=tr(I_n)=n$.

<u>פתרון ב:</u> תמיד $rank(AB)\le rank(A)$, ולכן אם $AB=I_m$ אז $m=rank(I_m)\le rank(A)$. מצד שני $rank(A)\le m$ (מספר השורות), ולכן בסה"כ $rank(A)=m$. באופן דומה, $rank(BA)\le rank(A)$ ולכן אם $BA=I_n$ אז $n=rank(I_n)\le rank(A)$ וגם $rank(A)\le n$ (מספר העמודות). לכן $rank(A)=n$, ובסה"כ $m=n$.