תרגיל 10 בפונקציות מרוכבות

1. פתחו את הפונקציה

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-2)}$$

לטור לורן בטבעת הנתונה

(א) הטבעת $|z-2| > 2$
קודם כל יותר נוח להציב $w = z - 2$ ואז לדבר על

$$\frac{1}{(w+2)^2 w}$$

בטבעת $2 < |w|$. ברור שהגורם של $\frac{1}{w}$ לא יעשה לנו בעיות. נסתכל רק על

$$\frac{1}{(w+2)^2}$$

ונשתמש בגזירה איבר איבר. אנחנו יודעים ש

$$\begin{aligned} \frac{1}{(w+2)} &= \frac{1}{w}\frac{1}{1+\frac{2}{w}} = \frac{1}{w}\frac{1}{1-(-\frac{2}{w})} \\ &= \frac{1}{w}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{w^n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{w^{n+1}} \end{aligned}$$

נגזור איבר איבר כדי לקבל

$$-\frac{1}{(w+2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-n-1)\frac{2^n}{w^{n+2}}$$

ולכן

$$\frac{1}{(w+2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{2^n}{w^{n+2}}$$

$$\frac{1}{(w+2)^2 w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\frac{2^n}{w^{n+3}}$$

(ב) הטבעת $0 < |z-2| < 2$
כאן צריך לפתח

$$\frac{1}{(w+2)^2 w}$$

בטבעת $0 < |w| < 2$. שוב אפשר להתמקד רק ב

$$\frac{1}{(w+2)^2}$$

אבל זאת פונקציה אנליטית בטבעת זו ולכן יש טור טיילור רגיל

$$\frac{1}{w+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^n}{2^n}$$

ולכן שוב ע"י גזירה איבר איבר

$$\frac{1}{(w+2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \frac{w^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \frac{w^n}{2^{n+1}}$$

ו

$$\frac{1}{(w+2)^2 w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \frac{w^{n-1}}{2^{n+1}}$$

2. מצאו את החלק העיקרי (דהיינו החלק עם חזקות שליליות) של טור לורן של הפונקציה

$$\frac{ze^{iz}}{(z^2+9)^2}$$

סביב הנקודה $z_0 = 3i$

פתרון:

$$f(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2(z-3i)^2}$$

נשים לב שבסביבת $3i$ הפונקציה

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{(z+3i)^2}$$

היא אנליטית ולכן טור לורן שלה הוא טור טיילור

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3i)^n$$

ולכן

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-3i)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-3i)^{n-2}$$

כלומר החלק העיקרי הוא

$$a_0(z-3i)^{-2} + a_1(z-3i)^{-1}$$

אבל כידוע,

$$a_0 = g(3i) \quad a_1 = g'(3i)$$

כלומ

$$a_0=\frac{3ie^{-3}}{(6i)^2}=\frac{3i}{e^3(-36)}=-\frac{i}{12e^3}$$

כמו כן,

$$\begin{aligned}g'(z)&=\frac{(e^{iz}+ize^{iz})(z+3i)^2-2(z+3i)(ze^{iz})}{(z+3i)^4}\\&=e^{iz}\frac{(1+iz)(z+3i)-2z}{(z+3i)^3}\end{aligned}$$

ולכן

$$g'(3i)=\frac{1}{e^3}\frac{(-2)(6i)-6i}{(6i)^3}=\frac{1}{e^3}\frac{-3}{-36}=\frac{1}{12e^3}$$

כלומר החלק העיקרי הוא:

$$-\frac{i}{12e^3}(z-3i)^{-2}+\frac{1}{12e^3}(z-3i)^{-1}$$

3. הראו כי אם ל f קוטב ב z_0 ולg יש סינגולריות עיקרית ב z_0 אז ל $f+g$ יש סינגולריות עיקרית ב z_0.
די טריויאלי מהסתכלות על טור לורן סביב z_0. החלק העיקרי של טור לורן של f הוא סופי והחלק העיקרי של טור לורן של g הוא אינסופי ולכן החלק העיקרי של טור לורן של $f+g$ יהיה אינסופי גם כן ולכן זו תהיה סינגולריות עיקרית.

4. נניח כי ל f סינגולריות מבודדת ב z_0. הוכיחו כי $\mathrm{Res}(f',z_0)=0$.
נסמן ב γ מעגל קטן סביב z_0. נזכור כי

$$\mathrm{Res}(f',z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}f'(z)\mathrm{d}z$$

אבל היות של f' יש פונקציה קדומה (הלוא היא f) נקבל ש

$$\int\limits_{\gamma}f'(z)\mathrm{d}z=0$$

כנדרש.

5. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות מכוונות נגד כיוון השעון):

(א) $$\int\limits_{|z|=3}\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}\mathrm{d}z$$

פתרון: נזכור ש

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$$

ולכן

$$e^{-\frac{1}{z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{z^2})^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-2n}$$

$$\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^{-2n+3}$$

הסינגולריות היחידה היא 0 והשארית בה מתקבלת כאשר $n=2$ כלומר

$$\mathrm{Res}(\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}},0)=\frac{(-1)^2}{2!}=\frac{1}{2}$$

ולכן

$$\int\limits_{|z|=3}\frac{z^3}{e^{\frac{1}{z^2}}}\mathrm{d}z=2\pi i\frac{1}{2}=\pi i$$

(ב) $$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}\mathrm{d}z$$

פתרון: בתוך התחום יש סינגולאריות אחת שהיא $z=1$ וזהו כמובן קוטב מסדר 6. נשתמש בנוסחא

$$\mathrm{Res}(\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6},1)=\frac{1}{5!}\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}(\frac{z^6}{(z-3)})$$

נבצע חישוב לפי לייבניץ

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}z^5}\frac{z^6}{(z-3)}&=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}((z-3)^{-1})\frac{\mathrm{d}^{5-k}}{\mathrm{d}z^{5-k}}(z^6)=\\&=(z-3)^{-1}720z+5\cdot(-(z-3)^{-2})\cdot 360z^2+10\cdot 2(z-3)^{-3}\cdot 120z^3\\&+10\cdot(-6(z-3)^{-4})\cdot 30z^4+5\cdot 24(z-3)^{-5}\cdot 6z^5-120(z-3)^{-6}\cdot z^6\end{aligned}$$

נציב $z=1$ ונקבל:

$$-\frac{720}{2}-\frac{5\cdot 360}{4}-\frac{20\cdot 120}{8}-\frac{60\cdot 30}{16}-\frac{30\cdot 24}{32}-\frac{120}{64}$$

ולכן

$$\mathrm{Res}(\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6},1)=\frac{1}{5!}(-\frac{720}{2}-\frac{5\cdot 360}{4}-\frac{20\cdot 120}{8}-\frac{60\cdot 30}{16}-\frac{30\cdot 24}{32}-\frac{120}{64})=-\frac{665}{64}$$

ולכן

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{z^6}{(z-3)(z-1)^6}\mathrm{d}z=2\pi i\frac{-665}{64}=-\pi i\frac{665}{32}$$

(ג) $\int\limits_{\gamma} \frac{1+z}{\sin z}\mathrm{d}z$ כאשר γ הוא הריבוע שקודקודיו $4+4i, 4-4i, -4+4i, -4-4i$

פתרון: בתוך התחום יש כמה סינגולאריות. $z=0$, $z=\pm\pi$. שאר הסינגולריות כבר מחוץ לתחום. כל הסינגולריות הן קטבים מסדר 1 (כי הן אפסים מסדר 1 של $\sin z$).

$$\mathrm{Res}(\frac{1+z}{\sin z}, 0) = \frac{1+0}{\cos 0} = 1$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1+z}{\sin z}, \pi) = \frac{1+\pi}{\cos \pi} = -1-\pi$$

$$\mathrm{Res}(\frac{1+z}{\sin z}, -\pi) = \frac{1-\pi}{\cos -\pi} = -1+\pi$$

ולכן סכום הסינגולאריות הוא -1 ולכן

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1+z}{\sin z}\mathrm{d}z = -2\pi i$$

(ד) $\int\limits_{|z|=1} \frac{1}{z^2(e^z-1)}\mathrm{d}z$

יש נקודת סינגולאריות אחת ב $z_0=0$. צריך להבין מה השארית שם. נזכור כי 0 הוא אפס מסדר 1 של e^z-1 ולכן הוא קוטב מסדר 3 של

$$\frac{1}{z^2(e^z-1)}$$

ננסה להבין מה השארית בטור לורן. קודם נבין כמה איברים בטור לורן של

$$\frac{1}{(e^z-1)} = \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots$$

$$1 = (\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots)(e^z-1) = (\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots)(z + \frac{z^2}{2} + \ldots)$$

נבצע השוואת מקדמים: עבור z^0:

$$1 = a_{-1}$$

עבור z^1:

$$0 = \frac{a_{-1}}{2} + a_0$$

כלומר

$$a_0 = -\frac{1}{2}$$

עבור z^2:

$$0 = \frac{a_{-1}}{6} + \frac{a_0}{2} + a_1$$

כלומר

$$a_1 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

זה מספיק כי מכאן ברור ש

$$\frac{1}{z^2(e^z - 1)} = \frac{1}{z^3} + \frac{-\frac{1}{2}}{z^2} + \frac{\frac{1}{12}}{z} + \dots$$

ולכן השארית היא $\frac{1}{12}$ והאינטגרל שווה ל

$$\frac{\pi i}{6}$$