מתמטיקה בדידה – תרגיל 7 - פתרונות

1. לכל אחת מן הקבוצות הבאות של זוגות סדורים, קבעו אם היא פונקציה. לכל אלה שקבעתם כפונקציה, יש לקבוע את התחום והתמונה של הפונקציה (תמונת התחום שלה). מה אפשר לומר על טווח הפונקציה?

א. $\{(1,2),(2,3),(2,4)\}$.
ב. $\{(1,2),(2,1),(3,4)\}$
ג. $\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid x<y\}$
ד. $\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid x+y=5\}$
ה. $\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2 \mid x+y=5\}$.
ו. $\{(x,y)\in\mathbb{N}^2 \mid x<y<x+2\}$
ז. $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x<y<x+2\}$
ח. $\{(x,y)\in\mathbb{Z}_5 \mid y=x^2\}$ (שלמים מודולו 5)[1].

פתרון:

א. לא פונקציה, כי לא מתקיים חד-ערכיות - $(2,3),(2,4)$ נמצאים ביחס.
ב. פונקציה. תחום $\{1,2,3\}$, תמונה $\{1,2,4\}$, הטווח יכול להיות כל קבוצה שמכילה את התמונה.
ג. לא פונקציה. לא מתקיים חד-ערכיות, למשל, $(2,3),(2,4)$ שייכים לקבוצה.
ד. פונקציה. הקבוצה מכילה את ששת הזוגות בלבד: $(5,0),(4,1),(3,2),(2,3),(1,4),(0,5)$. תחומה שווה לתמונתה ושווה ל- $\{0,1,2,3,4,5\}$, הטווח יכול להיות כל קבוצה שמכילה את התמונה.
ה. פונקציה. הקבוצה מכילה את כל הזוגות מהצורה $(x,5-x)$ כאשר $x\in\mathbb{Z}$. תחומה שווה לתמונתה ושווה ל- $\mathbb{Z}$, הטווח יכול להיות כל קבוצה שמכילה את התמונה.
ו. פונקציה. תחום הוא $\mathbb{N}$ והתמונה $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, הטווח יכול להיות כל קבוצה שמכילה את התמונה.
ז. לא פונקציה, כי אין חד ערכיות. גם $(1,2)$ וגם $(1,1.5)$ שייכים ליחס זה.
ח. פונקציה מכיוון שלכל $x\in\mathbb{Z}_5$ קיים y שעבורו $x^2=y\in\mathbb{Z}_5$ (ניתן לבדוק איבר-איבר).

2. יהיו A,B קבוצות לא ריקות.

א. הוכח כי קיימת פונקציה חח"ע $g:A\to A\times B$.
ב. הוכח כי אם קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to B$ אזי קיימת פונקציה חח"ע $h:A\times B\to B\times B$

פתרון:

א. נתון ש A,B קבוצות לא ריקות. יהי $b\in B$. נגדיר פונקציה $g:A\to A\times B$ ע"י לכל $a\in A$ $g(a)=(a,b)$. נוכיח ש g חח"ע: יהיו $a_1,a_2\in A$ ונניח ש $g(a_1)=g\left(a_2\right)$ ז"א $(a_1,b)=(a_2,b)$ על פי הגדרת זוג סדור - $a_1=a_2$.

ב. נתון ש A,B קבוצות לא ריקות. יהי $(a,b)\in A\times B$. נגדיר פונקציה $h:A\times B\to B\times B$ ע"י לכל $(a,b)\in A\times B$ $h((a,b))=(f(a),b)$. נוכיח ש h חח"ע: יהיו $a_1,a_2\in A,\quad b_1,b_2\in B$ ונניח ש $h((a_1,b_1))=h((a_2,b_2))$ ז"א $(f(a_1),b_1)=(f(a_2),b_2)$ על פי הגדרת זוג סדור - $f(a_1)=f(a_2),\quad b_1=b_2$. מחח"ע של f נובע $a_1=a_2$. לכן קיבלנו ש- h חח"ע.

[1] פעולות החיבור והכפל ב- $\mathbb{Z}_5$ מוגדרים היטב. כלומר, אם $a\equiv b\ (\mathrm{mod}\ n)$ וכן $c\equiv d\ (\mathrm{mod}\ n)$ אז $a+c\equiv b+d\ (\mathrm{mod}\ n)$ וכן $a\cdot c\equiv b\cdot d\ (\mathrm{mod}\ n)$.

3. ציינו לגבי כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא חח"ע, על או הפיכה[2] (חח"ע ועל). הוכיחו את תשובותיכם.

א. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N},\quad f(n)=|n|$.

ב. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^3$.

ג. $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R},\quad f(x)=2^x$.

ד. A קבוצה כלשהי ו- $f:P(A)\to P(B)$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(B)=A\setminus B$.

ה. יהיו X,Y שתי קבוצות ותהי $f:X\to Y$ פונקציה חח"ע. נגדיר פונקציה $F:P(X)\to P(Y)$ ע"י $F(A)=\{f(a)\,|\,a\in A\}$ $\forall A\in P(X),$.

ו. כמו סעיף ה' אבל הפונקציה $f:X\to Y$ גם על.

<u>**פתרון**</u>:

א. f היא פונקציה על ולא חח"ע (במקרה ש- $0\in\mathbb{N}$, אחרת f לא פונקציה). <u>לא חח"ע</u>: $f(1)=f(-1)=1$; <u>על</u>: $\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)=n$.

ב. f חח"ע- יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_1)=f(x_2)$ ז"א $x_1^3=x_2^3$ כעת $x_1^3=x_2^3\leftrightarrow x_1^3-x_2^3=0\leftrightarrow(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)=0$ לא קיימים $x_1,x_2\in R$ שעבורם $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=0$ ולכן הפתרון היחיד הוא $x_1=x_2$.

f על- יהי $x\in R$ נתבונן במשוואה $y^3-x=0$ מכיוון שהחזקה של הפולינום היא אי זוגית נקבל לפחות פתרון ממשי אחד נסמנו ב $\sqrt[3]{x}$. כעת $f\left(\sqrt[3]{x}\right)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^3=x$. ולכן f הפיכה. הפונקציה ההופכית היא $g(x)=\sqrt[3]{x}$ נראה שפונקציה זו היא אכן הפונקציה ההופכית: $f(g(x))=f(\sqrt[3]{x})=(\sqrt[3]{x})^3=x$ וכן $g(f(x))=g(x^3)=\sqrt[3]{x^3}=x$, ולכן $f\circ g=g\circ f=I$.

ג. f חח"ע- יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{Q}$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)$ ז"א כך ש $2^{x_1}=2^{x_2}$ ולכן $x_1=x_2$. f אינה על מכיוון שלא קיים מספר רציונאלי עבורו $2^x=3$ למשל.

ד. f חח"ע- יהיו $B_1,B_2\in P(A)$ ונניח ש $f(B_1)=f(B_2)$ ז"א $A\setminus B_1=A\setminus B_2$ נוכיח ש- $B_1=B_2$
נוכיח תחילה ש- $B_1\subseteq B_2$: יהי $x\in B_1$ מכיוון ש $B_1\in P(A)$ עלפי הגדרת החזקה $B_1\subseteq A$ ולכן $x\in A$ מכיוון ש
$A\setminus B_1=A\setminus B_2$ נקבל ש $x\notin A\setminus B_2$ ז"א $x\notin A\vee x\in B_2$ אבל $x\in A$ ולכן בהכרח $x\in B_2$.
באותו אופן ניתן להוכיח ש $B_2\subseteq B_1$.
f על- יהי $B\in P(A)$ נתבונן ב

$$f(A\setminus B)=A\setminus(A\setminus B)=A\cap\left(A\cap B^c\right)^c=A\cap\left(A^c\cup B\right)=\left(A\cap A^c\right)\cup\left(A\cap B\right)=B$$

השוויון הראשון-נובע מהגדרת f . השוויון השני-נובע מהתרגול. השוויון השלישי- דה מורגן
השוויון הרביעי-דסטריביוטיביות
השוויון החמישי-נתון ש $B\in P(A)$ על פי הגדרת החזקה $B\subseteq A$ הובחנו בתרגול שאם $B\subseteq A$ אז $A\cap B=B$.
קיבלנו ש f הפיכה והפונקציה ההופכית $g(B)=A\setminus B$.
$f(g(B))=f(A\setminus B)=A\setminus(A\setminus B)=B$ באותו אופן $g(f(B))=B$ ולכן $f\circ g=g\circ f=I$.

ה. F חח"ע- יהיו $A_1,A_2\in P(X)$ כך ש $f(A_1)=f(A_2)$ ז"א $\{f(a)|a\in A_1\}=\{f(a)|a\in A_2\}$.

---

[2] שאלת רשות: אם הפונקציה הפיכה – מצאו את הפונקציה ההופכית. פונקציה $g(x):Y\to X$ היא <u>ההופכית</u> של $f(x):X\to Y$ אם מתקיים $(\forall x\in X\quad f\circ g(y)=y)\ \wedge\ (\forall y\in Y\quad g(f(x))=x)$

נוכיח ש $A_1 = A_2$ תחילה נוכיח ש $A_1 \subseteq A_2$.

יהי $x \in A_1$ ולכן $f(x) \in \{ f(a) | a \in A_1 \} = \{ f(a) | a \in A_2 \}$ מכיוון ש f חח"ע $x \in A_2$ כי אחרת (ז"א אם $x \notin A_2$) נקבל ש $f(x) \in \{ f(a) | a \in A_2 \}$ ז"א קיים $y \in A_2$ כך ש $f(x) = f(y)$ מכיוון שמצד אחד $x \notin A_2$ ומצד שני $y \in A_2$ נקבל ש $x \neq y$ בסתירה לנתון ש f חח"ע.

F לא בהכרח על- כי f לא על אז קיים $y \in Y$ כך שעבורו לא קיים x כך ש $f(x) = y$ ובפרט לא קיים $A \in P(X)$ כך ש $y \in \{ f(a) | a \in A \}$ ובפרט $\{y\} \neq \{ f(a) | a \in A \}$ ומהגדרת החזקה $\{y\} \in P(Y)$.

ו. F לא בהכרח חח"ע - הוכחה דומה להוכחה ש F לא על בסעיף הקודם.

F על - יהי $B \in P(Y)$ על פי הגדרת החזקה $B \subseteq Y$ מכיוון ש f על לכל $b \in B$ קיים $a \in X$ כך ש $f(a) = b$ נתבונן בקבוצה $A = \{ f^{-1}[B] \}$ ולכן $B = \{ f(a) | a \in A \}$.

4. בשאלה זו הקבוצה U היא קבוצת המילים הסופיות (כולל המילה הריקה) מעל הא"ב[3] $\{a, b, c, ..., z\}$.
מגדירים פונקציה $f:U \to U$ ע"י מחיקת כל אות שניה, לדוגמה: $f(and) = ad$
$f(mathematics) = mteais,$

א. האם f היא על? אם לא, מצא דוגמה נגדית. אם כן, מצא $g:U \to U$ כך ש- $f \circ g$ היא פונקצית הזהות על U.

ב. האם f היא חח"ע? אם לא, מצא דוגמה נגדית. אם כן, מצא $g:U \to U$ כך ש- $g \circ f$ היא פונקצית הזהות על U.

__פתרון__:

א. הפונקציה f היא אכן על, וכדי להוכיח זאת, מספיק להראות כי כי f הפיכה מימין, דהיינו קיימת $g:U \to U$ כך ש- : $f \circ g = I_U$ היא פונקציית הזהות על U. ישנן הרבה פונקציות כאלה, למשל אפשר להגדיר את g להיות הפונקציה המכפילה כל אות, לדוגמה: $g(and) = aanndd$. באופן כללי, עבור כל מילה $a_1a_2...a_n$, $g(a_1a_2...a_n) = a_1a_1a_2a_2...a_na_n$ (או לחיליפין, ניתן להגדיר $g(a_1a_2...a_n) = a_1ba_2b...a_nb$). כעת $\forall a_1a_2...a_n \in U,\ f \circ g(a_1a_2...a_n) = f(a_1a_1a_2a_2...a_na_n) = a_1a_2...a_n$ ולכן $f \circ g$ פונקציית זהות על U.

ב. הפונקציה f איננה חח"ע. דוגמא נגדית, למשל: $f(and) = f(agd) = ad$. כלומר יש שתי מילים שונות שהפונקציה מחזירה עליהן את אותה המילה.

__בהצלחה!__

[3] מילה מעל א"ב היא מילה המורכבות רק מאותיות הא"ב.