

פיתרון לתרגיל מספר 9

תשובה 1:

נסמן ב- X את תכולת המינרלים בקידוח, $X \sim N(\mu, 15^2)$, כמו כן נתון: $n = 25$ ו- $\bar{X} = 248.3$.
רמת בטחון של 90% $\Leftrightarrow \alpha = 0.1 \Leftrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$ לכן נשתמש בנוסחאת רוי"ס ברמת בטחון של

$$\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1-\alpha)\% \text{ לתוחלת כאשר השונות ידועה:}$$

$$\Leftrightarrow 248.3 - 1.645 \cdot \frac{15}{5} \leq \mu \leq 248.3 + 1.645 \cdot \frac{15}{5}$$

$$243.365 \leq \mu \leq 253.235$$

תשובה 2:

נסמן ב- X את הגובה, $X \sim N(\mu, 0.1^2)$ (מכיוון ש-10 ס"מ הם 0.1 מטרים) $n = 16$.
נחשב את הממוצע: $\bar{X} = \frac{22.79}{16} = 1.4244$. רוי"ס ברמת בטחון של $1-\alpha$ לתוחלת כאשר השונות ידועה

$$\text{הוא: } 1.3724 \leq \mu \leq 1.4765 \text{ וידוע ש- } 1.4244 - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{4} \leq \mu \leq 1.4244 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{4}$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.08 \Leftrightarrow 1.4244 + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{0.1}{4} = 1.4765 \text{ נשווה את החסם העליון ונקבל:}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9812 \Leftrightarrow \alpha = 0.0376 \text{ לכן רמת הביטחון היא } 96.24\%$$

תשובה 3:

נשתמש בנוסחאת רוי"ס ברמת מובהקות של α לתוחלת כאשר השונות ידועה:

$$\text{במקרה שלנו, רמת ביטחון של } 95\% \Leftrightarrow \alpha = 0.05 \Leftrightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.96 \text{ לכן נקבל}$$

$$52 - 1.96 \cdot \frac{1.25}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq 52 + 1.96 \cdot \frac{1.25}{\sqrt{n}}$$

$$\text{שווה ל-} 0.5 \Rightarrow \sqrt{n} = 4.9 \Rightarrow n \approx 24 \text{ ז"א שיש צורך במדגם בגודל 24 ילדים.}$$

תשובה 4:

א. נסמן ב- X את זמן השהייה בדקות. נחשב: $\bar{X} = 69, \hat{S}^2 = 633.7778$. ולכן רו"ס של 95% לתוחלת זמן השהייה בשדה הוא:

$$\bar{X} \pm t_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 69 \pm t_{9, 0.975} \cdot \frac{\sqrt{633.7778}}{\sqrt{10}} = 69 \pm 2.26 \cdot 7.961 = [51.0081, 86.9919]$$

ב. $L = b - a = 86.9919 - 51.0081 = 35.9838$. אורך רווח הסמך. לכן הסטיה המקסימלית תהיה:

$$\frac{L}{2} = \frac{35.9838}{2} = 17.99$$

ג. להגדיל את גודל המדגם או להקטין את השונות.

תשובה 5:

נסמן ב- X את גובה העץ במטרים. נתון כי X מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 0.7. על מנת שהמוצע בין הסטיה לתוחלת לא יעלה על 0.6 מטר, רוחב רו"ס של 95% צריך להיות קטן או שווה ל-1.2 מטר:

$$\text{כלומר גודל המדגם} \quad 2 \cdot Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 1.2 \Rightarrow n \geq \left(\frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{0.6} \right)^2 = \left(\frac{Z_{0.975} \cdot 0.7}{0.6} \right)^2 = 5.2288$$

צריך להיות לפחות 6.

תשובה 6:

נבדוק אם מתקיים כי תוחלת האומד שווה לאומד:

$$E(\hat{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}\right) = \frac{2}{n} E\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{2}{n} [E(x_1) + \dots + E(x_n)] =$$

$$\frac{2}{n} \cdot n \cdot E(x_i) = 2 \cdot \int_0^{\theta} x \frac{1}{\theta} dx = 2 \cdot \frac{\theta}{2} = \theta$$

לכן האומד הינו חסר הטיה.

תשובה 7:

שימו לב, מאחר ומדובר בזוגות של תצפיות על אותם סטודנטים, לנינו מדגם מזווג. נחשב את ערכי ההפרשים:

$$D: x_b - x_a: -33, -28, -22, -32, -29, -40 \quad \bar{D} = -30 \frac{2}{3} \text{ ממוצעם. האומד לשונות הוא.}$$

$$\hat{s}_d^2 = \frac{\sum (D_i - \bar{D})^2}{n-1} = 35.86 \quad \text{לכן עבור } t_{5, 0.95} = 2.445 \text{ נקבל:}$$

$$30\frac{2}{3} - \frac{5.989}{\sqrt{6}} * t_{5,0.95} < \mu_d < 30\frac{2}{3} + \frac{5.989}{\sqrt{6}} * t_{5,0.95}$$

$$.25.72 < \mu_d < 35.6 \text{ ונקבל}$$

תשובה 8:

נחשב אומדים לשונות עבור מעשנים ולא מעשנים: $\hat{S}_1^2 = 161.4$ $\hat{S}_2^2 = 95.9$ למרות שאיננו יודעים מהן השונות של 2 האוכלוסיות, נתון לנו שהן שוות לכן נאמוד את השונות המשותפת ע"י

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)\hat{S}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{S}_2^2}{n_2 + n_1 - 2} = 121.4$$

סה"כ יש $n_2 + n_1 = 20$ דגימות לכן מספר דרגות החופש הוא $n_2 + n_1 - 2 = 18$ בהתאם לכך ומאחר ואנו נדרשים לרמת מובהקות (ביטחון) של $t_{18,0.975} = 2.195\%$ גבולות רוי"ס הם

$$8.9 < \mu_2 - \mu_1 < 30.1 \text{ מכאן } \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm \sqrt{\frac{\hat{S}_p^2}{n_1}} + \sqrt{\frac{\hat{S}_p^2}{n_2}} \cdot t_{n_1+n_2-2, 1-\frac{\alpha}{2}}$$

תשובה 9:

$\bar{X} = \frac{\sum X_i}{10} = 170.6$ האומד $\sum (X_i - \bar{X})^2$ לשונות האוכלוסיה מתפלג חי-בריבוע.

$\sum (X_i - \bar{X})^2 = 398.4$ עפ"י הדרישה לרמת המובהקות של 95%, ומאחר ומספר דרגות החופש הוא 10-

$$9=1 \text{ ניקח } \chi_{9,0.025} = 2.7 \text{ ו- } \chi_{9,0.975} = 19 \text{ מכאן}$$

$$.20.968 < \sigma^2 < 147.556 \text{ דהיינו } \frac{398.4}{19} < \sigma^2 < \frac{398.4}{2.7}$$

תשובה 10:

נתון ששתי האוכלוסיות הנדגמות הן ב"ת לכן האומד לשונות של הפרש התוחלות הוא

$$S = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{225}{25} + \frac{100}{16}}$$

$$\text{מכאן מקבלים. } (60 - 50) \pm \sqrt{\frac{225}{25} + \frac{100}{16}} * 1.645$$

תשובה 11:

נסמן ב- X_k^B את רוחב הספר ה- k וב- X_k^J את רוחב כתב האת ה- k . אזי אורכי סדרת הספרים X_B וסדרת כתבי את X_J הם

$$X_B = \sum_{k=1}^{N_B} X_k^B$$

—ו

$$X_J = \sum_{k=1}^{N_J} X_k^J$$

בהתאמה.

כיוון ש- N_B ו- N_J הם מספרים גדולים, על פי משפט הגבול המרכזי מתקיים:

$$X_B \sim N(N_B \mu_B, N_B \sigma_B^2), \quad X_J \sim N(N_J \mu_J, N_J \sigma_J^2)$$

נגדיר את ההפרש $\Delta = X_B - X_J$. ההסתברות הדרושה היא $P(\Delta > 0)$. מתקיים:

$$\Delta \sim N(N_B \mu_B - N_J \mu_J, N_B \sigma_B^2 + N_J \sigma_J^2)$$

חישוב פשוט מביא:

$$P(\Delta > 0) = 1 - P(\Delta < 0) = 1 - \Phi\left(\frac{N_J \mu_J - N_B \mu_B}{\sqrt{N_B \sigma_B^2 + N_J \sigma_J^2}}\right)$$

כך ש—

$$P(\Delta > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{7.45}}\right) \approx 1 - \Phi(1.83) = 0.034$$

תשובה 12:

נתחיל מהנוסחאות

$$\bar{Y}_{(k)} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k Y_j, \quad \bar{X}_{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$$

—ו

$$\hat{S}_{(Y,k)}^2 = \frac{1}{k-1} \left[\sum_{j=1}^k Y_j^2 - k \bar{Y}_{(k)}^2 \right], \quad \hat{S}_{(X,n)}^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^n X_j^2 - n \bar{X}_{(n)}^2 \right]$$

על פי הגדרה, הממוצע של המדגם המאוחד $Z = \{X_1, X_2, \dots, X_n, Y_1, Y_2, \dots, Y_k\}$ הוא

$$\bar{Z}_{(n+k)} = \frac{1}{n+k} \left(\sum_{j=1}^n X_j + \sum_{j=1}^k Y_j \right) = \frac{1}{n+k} (n \bar{X}_{(n)} + k \bar{Y}_{(k)})$$

על פי הגדרה, אומדן לשונות של המדגם המאוחד הוא

$$\hat{S}_{(Z, n+k)}^2 = \frac{1}{n+k-1} \left[\sum_{j=1}^n X_j^2 + \sum_{j=1}^k Y_j^2 - (n+k) \bar{Z}_{(n+k)}^2 \right]$$

כיוון ש—

$$\sum_{j=1}^n X_j^2 = (n-1) \hat{S}_{(X, n)}^2 + n \bar{X}_{(n)}^2$$

—ו

$$\sum_{j=1}^k Y_j^2 = (k-1) \hat{S}_{(Y, k)}^2 + k \bar{Y}_{(k)}^2$$

אנחנו מקבלים:

$$\hat{S}_{(Z, n+k)}^2 = \frac{1}{n+k-1} \left[(n-1) \hat{S}_{(X, n)}^2 + (k-1) \hat{S}_{(Y, k)}^2 + n \bar{X}_{(n)}^2 + k \bar{Y}_{(k)}^2 - (n+k) \bar{Z}_{(n+k)}^2 \right]$$

נשאר לפשט את החלק שמתייחס למוצעים:

$$\begin{aligned} & n \bar{X}_{(n)}^2 + k \bar{Y}_{(k)}^2 - (n+k) \bar{Z}_{(n+k)}^2 \\ &= n \bar{X}_{(n)}^2 + k \bar{Y}_{(k)}^2 - (n+k) \frac{1}{(n+k)^2} (n \bar{X}_{(n)} + k \bar{Y}_{(k)})^2 \\ &= \frac{1}{n+k} \left[n(n+k) \bar{X}_{(n)}^2 + k(n+k) \bar{Y}_{(k)}^2 - (n \bar{X}_{(n)} + k \bar{Y}_{(k)})^2 \right] \\ &= \frac{nk}{n+k} (\bar{X}_{(n)} - \bar{Y}_{(k)})^2. \end{aligned}$$