

תרגיל 1

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X, d) מתקיים:
- א. $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \dots + d(x_{n-1}, x_n)$ לכל $n \geq 2$.
 - ב. $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$.
 - ג. $\forall A \subseteq X, |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$.
2. נסמן ב- X את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1, 2, \dots, n\}$, ונגדיר את הפונקציה $d : X \times X \rightarrow [0, \infty)$ על ידי:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{\min\{i : x_i \neq y_i\}} & x \neq y \end{cases}$$

הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X .

3. הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות:
- א. $d((x, y), (x', y')) = \min\{d(x, x'), d(y, y')\}$ על \mathbb{R}^2 .
 - ב. $d((x, y), (x', y')) = |x| + |y| + |x'| + |y'|$ על \mathbb{R}^2 .
 - ג. $d((x, y), (x', y')) = d(x, x') + d(y, y')$ כאשר (X, d) הוא מרחב מטרי.

4. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה p -אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני,

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases} \quad k(x, y) = \max\{i : p^i | (x - y)\}$$

תארו את הכדור $B_{d_7}(3, \frac{1}{49})$ במרחב (\mathbb{Z}, d_7) .

5. יהי (X, d) מרחב מטרי, $x_1, x_2 \in X$ ו- $r_1, r_2 > 0$ ונניח ש- $p \in B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$ נסמן

$$r = \min\{r_1 - d(x_1, p), r_2 - d(x_2, p)\}$$

. הוכיחו ש

$$B(p, r) \subseteq B(x_1, r_1) \cap B(x_2, r_2)$$

שאלת אתגר: הראו שאם $(X, \|\cdot\|)$ מרחב נורמי, d_1 המטריקה המושרית מהנורמה, אז לא קיימים כדורים שונים $B(a_1, r_1), B(a_2, r_2)$ כך ש- $r_1 < r_2$ וגם $B(a_2, r_2) \subseteq B(a_1, r_1)$.