

טעויות נפוצות בחשבון עוצמות

ישנם הרבה כללים נכונים ומועילים עבור חשבון עוצמות; אולם ישנם גם "כללי אצבע" מוטעים. להלן שתי דוגמאות ל"כללי אצבע" שגויים, שהופיעו במחברות בחינה בקורס "מתמטיקה בדידה". כללים אלו נכונים אולי לעוצמות קטנות, אך **אינם נכונים** באופן כללי ללא הנחות נוספות.

כאמור, הטענות הבאות **אינן נכונות**:

1. אם $a < b$ הן עוצמות אינסופיות, אז $2^a < 2^b$.

2. אם $a < b$ הן עוצמות אינסופיות, אז $b^a = b$.

הסברים (מדוע הטענות הנ"ל **אינן נכונות**):

1. כמובן, נכון שההנחה $a \leq b$ גוררת $2^a \leq 2^b$. הבעיה היא כאשר מנסים להסיק אי-שוויון חזק $2^a < 2^b$, אפילו בהינתן אי-שוויון חזק $a < b$. טענה זו נקראת "השערת הרצף המוכללת החלשה" (WGCH); גם היא וגם שלילתה עקביות עם מערכת האקסיומות ZFC. למשל, אם מניחים את שלילת השערת הרצף החלשה אז $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$ למרות ש- $\aleph_0 < \aleph_1$, כאשר \aleph_1 היא העוצמה הבאה אחרי \aleph_0 . (לפי השערת הרצף $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$).

2. גם טענה זו לא נכונה אם לא מניחים את השערת הרצף. למשל, $2^{\aleph_0} \leq \aleph_1^{\aleph_0}$ ולכן אם $2^{\aleph_0} < \aleph_1 < \aleph_1^{\aleph_0}$ (שלילת השערת הרצף) אז $\aleph_0 < \aleph_1^{\aleph_0}$. עם קצת יותר תחכום אפשר לתת דוגמא נגדית גם בלי קשר להשערת הרצף: $b < b^{\aleph_0}$, כאשר $b = \aleph_{\aleph_0}$.