תרגיל 5 מרוכבות

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים (המסילות הסגורות הן נגד כיוון השעון)

(א)

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^7}{z-1}\mathrm{d}z$$

שימוש ישיר במשפט קושי ($f(z)=(z+1)^7$ $z_0=1$) נותן לנו

$$\int\limits_{|z-1|=1} \frac{(z+1)^7}{z-1}\mathrm{d}z = 2\pi i(1+1)^7 = 256\pi i$$

(ב)

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z$$

שימוש ישיר במשפט קושי נותן לנו

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i e^0 = 2\pi i$$

(ג)

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)}\mathrm{d}z$$

אפשר כאן פשוט להציב לפי הגדרה

$$\int\limits_{\gamma} \frac{1}{(z-1)(z+1)}\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z^2-1}\mathrm{d}z = \int\limits_{-1}^{1} \frac{i}{(it)^2-1}\mathrm{d}t = \int\limits_{-1}^{1} \frac{-i}{t^2+1}\mathrm{d}t = -i\arctan t|_{-1}^{1} = -i(\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4}) = -i\frac{\pi}{2}$$

כאשר $-1 \le t \le 1 \quad \gamma(t)=it$

(ד)

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z$$

כאשר $t \in \mathbb{R}$.

שתי נקודות חוסר האנליטיות $\pm i$ נמצאות בתוך התחום ולכן אי אפשר להשתמש ישירות במשפט קושי. נגדיר שתי מסילות קטנות. D_1 סביב i ו D_2 סביב $-i$ ואז

$$\int\limits_{|z|=5} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int\limits_{D_1} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z + \int\limits_{D_2} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z$$

לפי משפט קושי

$$\int\limits_{D_1} \frac{e^{tz}}{z^2+1}\mathrm{d}z = \int\limits_{D_1} \frac{e^{tz}}{(z-i)(z+i)}\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{e^{it}}{2i} = \pi e^{it}$$

ו

$$\int\limits_{D_2} \frac{e^{tz}}{(z-i)(z+i)}\mathrm{d}z = 2\pi i \frac{e^{-it}}{-2i} = -\pi e^{-it}$$

בסך הכל מתקבל

$$\pi e^{it} - e^{-it} = 2\pi \sin t$$

אפשר לפתור גם על ידי פיצול לשברים חלקיים.

2. יהי $k \in \mathbb{R}$. הוכיחו כי

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{k\cos\theta}\cos(k\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{k\cos\theta}\sin(k\sin\theta)\mathrm{d}\theta = 0$$

רמז: חשבו את

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z}\mathrm{d}z$$

נחשב את

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z}\mathrm{d}z$$

בשתי דרכים שונות. מצד אחד לפי פרמטריזציה

$$\gamma(t) = e^{it} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

שאז האינטגרל יוצא

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z}\mathrm{d}z = \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{ke^{it}}}{e^{it}} ie^{it}\mathrm{d}t = i\int\limits_0^{2\pi} e^{ke^{it}}\mathrm{d}t$$
$$= i\int\limits_0^{2\pi} e^{k\cos t + ki\sin t}\mathrm{d}t = i\int\limits_0^{2\pi} e^{k\cos t}(\cos(k\sin t) + i\sin(k\sin t))\mathrm{d}t$$

כלומר זה שווה ל

$$-\int\limits_0^{2\pi} e^{k\cos t}\sin(k\sin t))\mathrm{d}t + i\int\limits_0^{2\pi} e^{k\cos t}(\cos(k\sin t)\mathrm{d}t$$

מצד שני חישוב של האינטגרל לפי משפט קושי נותן לנו ש

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{e^{kz}}{z}\mathrm{d}z = 2\pi ie^0 = 2\pi i$$

מהשוואה של חלק ממשי ודמיוני נקבל

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{k\cos t}(\cos(k\sin t)\mathrm{d}t = 2\pi$$

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{k\cos t}\sin(k\sin t))\mathrm{d}t = 0$$

שזה מה שנדרש

3. נגדיר פונקציה בתחום $|z| < 3$ לפי

$$f(z) = \int\limits_{|w|=3} \frac{3w^2 + 7w + 1}{w - z}\mathrm{d}w$$

מצאו את $f'(1+i)$.
נגדיר $g(z) = 3z^2 + 7z + 1$. לפי נוסחת קושי, לכל $z \in \{z \mid |z| < 3\}$ מתקיים

$$\int\limits_{|w|=3} \frac{3w^2 + 7w + 1}{w - z}\mathrm{d}w = 2\pi ig(z)$$

ולכן

$$f(z) = 2\pi i(3z^2 + 7z + 1)$$

ואז

$$f'(z) = 2\pi i(6z+7)$$

כלומר

$$f'(1+i) = -12\pi + 26\pi i$$

4. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות

(א) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(iz)$ אז f קבועה.

i. לא נכון. $f(z) = z^4$ היא דוגמא נגדית.

(ב) אם לכל z מתקיים $f(z) = f(3z)$ אז f קבועה.

i. על עיגול היחידה $\{z \mid |z| \leq 1\}$ אנחנו יודעים ש $f(z)$ חסומה כי היא רציפה. כלומר קיים M כך שלכל z המקיים $|z| \leq 1$ מתקיים $|f(z)| \leq M$ אבל לכל $z \in \mathbb{C}$ יש n טבעי כך ש $|\frac{z}{3^n}| \leq 1$ ואז

$$|f(z)| = |f(\frac{z}{3})| = |f(\frac{z}{3^2})| = \cdots = |f(\frac{z}{3^n})| \leq M$$

ולכן $f(z)$ חסומה ולכן קבועה.

5. תהי $f(z)$ פונקציה שלמה המקיימת $|f(z) - f(2z)| \leq 10$, הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

(א) נגדיר $g(z) = f(z) - f(2z)$ היא גם פונקציה שלמה אבל היא חסומה ולכן $g(z)$ קבועה. כלומר קיים c כך ש $f(z) - f(2z) = c$. אם נציב $z = 0$ נגלה ש $c = 0$ ולכן $f(z) = f(2z)$. מכאן מוכיחים ש f קבועה כמו בשאלה 4ב.