

**עליזות והשימושים מזוהה!**  
 נבחן שיכולים ברשותו חומר  
 עזר אסורים או יופס בהעתקה  
 יונש בחומרה עד כדי הרחקתו  
 מהאוניברסיטה.

בחינה בקורס 01-526-88 גיאומטריה דיפרנציאלית 1  
 מועד ג' מרץ: פרופ' מיכאל כץ  
 תאריך בחינה: 05.08.08  
 משך הבחינה: שעתים וחצי  
 נא לחתם הצדקה לכל תשובה.

**ב ה צ ל ה ה !**

1. נסתכל על המשטח  $M \subset \mathbb{R}^3 : M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1\}$
- מצאו עקוםת  $C$  מהירות יחידה, וגם פרמטריזציה של  $M$  כמשטח סיבוב של  $C$ .
  - חשבו את התבנית היסודית הראושנה של  $M$ .
  - חשבו את התבנית היסודית השנייה של  $M$ .
  - חשבו את מיפוי וינגרטן של  $M$ .

2. נתון המשטח הבא ב-  $\mathbb{R}^3 : M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^3\}$
- מהי עקומות גאות  $K$  של  $M$ ?
  - הוכיחו שהקו  $\{0 = y = z = x\} \subset M$  הוא עקום גיאודזית של  $M$ .
  - הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:  
 $K_{M_1} = K_{M_2}$  שני משטחים ב-  $\mathbb{R}^3$  כך שעקומות גאות שלהם קבועה ושווה (ז"א)  
 בכל נקודה). אזי קיימת איזומטריה בין  $M_1$  ובין  $M_2$ .

3. נסתכל על מישור  $R^2 : \{(x,y) \in R^2 : x,y \in R\}$  כאשר הוא מצויד בתבנית היסודית הראשונה הבאה:
- $$g_{ij} = e^{(x+y)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- מצאו את סימני קריסטופל  $\Gamma_{ij}^k$ .
  - אם הישר  $x = y$  הוא עקום גיאודזית?
  - אם הישר  $y = 0$  הוא עקום גיאודזית?
  - אם הישר  $x = 1$  הוא עקום גיאודזית?

4. נסתכל על משטח  $M$  שהוא ספרה ב-  $\mathbb{R}^3$  בעלת דרישות ומרכז בראשית הצירים. יהי  $a < 6$  - מספר כלשהו.
- מצאו פרמטריזציה מהירות יחידה ועקומות של עקמת החיתוך  $z$  של  $M$  ושל המישור  $\{z=a\}$ .
  - עבור איזה ערך של  $a$  העקומה הדגל היא עקום גיאודזית על גבי  $M$ ?  
 -- נסמן הערך שמצוותם בסעיף ג' ב-  $b$ .
  - עבור  $b+1 = a$ , תהי  $S$  ספרה, שעקמת החיתוך  $z$  של  $M$  ושל המישור  $a=z$  היא עקום גיאודזית של  $S$ . מצאו פרמטריזציה של  $S$  כמשטח סיבוב של עקמות מהירות יחידה.

5. נתבונן במשטח רגולרי  $(u^1, u^2) \mapsto \mathbb{R}^3$ .
- הגדיר את מושג הרגולריות של  $(u^1, u^2)$ .
  - הוכח שהביטוי  $\frac{\partial}{\partial u^m} (\Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij}^k)$  הוא סימטרי ביחס לאינדקסים  $j$  וגם  $m$ .
  - כתב את הביטוי  $L_{ij}^k$  באמצעות של המקדמים  $\Gamma$  וגם  $g_{ij}$  בלבד.

**יעודו המשמעות נזלה!**  
 נבחן שימצאנו ברשתו חומרוי  
 עזר אסורים או יונפס בחעתקה  
 יונש בחומרה עד כדי הרכקתו  
 מהאוניברסיטה.

בחינה בקורס 01-526-88 גיאומטריה דיפרנציאלית 1

מועד ג מרצה: פרופ' מיכאל צץ

תאריך בחינה: 05.08.08

משך הבחינה: שעתיים וחצי

נא לחת הצדקה לכל תשובה.

1. נסתכל על המשטח  $M \subset \mathbb{R}^3 : \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1 \}$

א) מצאו עקוםת  $C$  מהירות יחידה, וגם פרמטריזציה של  $M$  כמשטח סיבוב של  $C$ .

ב) חשבו את התבנית היסודית הראונה של  $M$ .

ג) חשבו את התבנית היסודית השנייה של  $M$ .

ד) חשבו את מיפוי ויינגרטן של  $M$ .

2. נתון המשטח הבא ב-  $\mathbb{R}^3 : M = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^3 \}$

א) מהי עקומות גאות  $K$  של  $M$ ?

ב) הוכחו שהקו  $\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z = 0 \} = L$  הוא עקום גיאודזית של  $M$ .

ג) הוכחו או הפריכו את הטענה הבאה:

נניח ש-  $M_1, M_2$  שני משטחים ב-  $\mathbb{R}^3$  כך שעקומות גאות שלהם קבועה ושוות ( $\text{ז"א}$  בכל נקודה). אז קיימת איזומטריה בין  $M_1$  ובין  $M_2$ .

3. נסתכל על מישור  $R^2 = \{ (x,y) : x, y \in R \}$  כאשר הוא מצויד בתבנית היסודית הראשונה הבאה:

$$g_{ij} = e^{(x+y)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א) מצאו את סימני קריסטופל  $\Gamma_{ij}^k$ .

ב) האם הישר  $x = y$  הוא עקום גיאודזית?

ג) האם הישר  $0 = y$  הוא עקום גיאודזית?

ד) האם הישר  $1 = x$  הוא עקום גיאודזית?

4. נסתכל על משטח  $M$  שהוא ספרה ב-  $\mathbb{R}^3$  בעלת רדיוס 6 ומרכזו בראשית הצירים. יהי  $a = 6 - \text{מספר}$  כלשהו.

א) מצאו פרמטריזציה מהירות יחידה ועקומות של עקום החיתוך  $\gamma$  של  $M$  ושל המישור  $\{ z = a \}$ .

ב) עבור איזה ערך של  $a$  העקום הנ"ל היא עקום גיאודזית על גבי  $M$ ?

-- נסמן הערך שמצאתם בסעיף ג' ב-  $b$ .

ג) עבור  $b+1 = a$ , תהי  $S$  ספרה, שעקומת החיתוך  $\gamma$  של  $M$  ושל המישור  $a = z$  היא עקום גיאודזית של  $S$ . מצאו פרמטריזציה של  $S$  כמשטח סיבוב של עקום מהירות יחידה.

5. נתבונן במשטח רגולרי  $(u^1, u^2) \mapsto R^3$ .

א) הגדר את מושג הרגולריות של  $(u^1, u^2)$ .

ב) הוכח שהביטוי  $\frac{\partial}{\partial u^m} (\Gamma_{ij}^k x_k + L_{ij}^k n_j)$  הוא סימטרי ביחס לאינדקסים  $j$  וגם  $m$ .

ג) כתוב את הביטוי  $L_{i[j} L_{k]}^q$  באמצעות של המקדים  $\Gamma$  וגם  $n_j$  בלבד.