אינפי 3 תרגיל בית 2

1 בנובמבר 2015

שאלה 1

יהי $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{R}^n$, הוכח כי

$$\frac{|x_1|+....+|x_n|}{\sqrt{n}}\leq\sqrt{x_1^2+x_2^2+....+x_n^2}\leq|x_1|+...+|x_n|$$

רמז: בשביל אחד מצדדי אי השוויון יש להשתמש באי שוויון קושי שוורץ.

שאלה 2

תהי $d:X\times X\to\mathbb{R}^+$ מטריקה. הוכח כי הפונקציות הבאות הן מטריקות:

א) $\alpha(x,y)=min\{d(x,y),1\}$

ב) $\beta(x,y)=\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

שאלה 3

הוכיחו: שפה של קבוצה היא קבוצה סגורה.

שאלה 4

עבור קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$, נסמן ב $limA$ את אוסף נקודות הגבול של A. הוכח/הפרך את הטענות הבאות:

א) לכל שתי קבוצות $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ מתקיים $limA\cap limB\subseteq lim(A\cap B)$.

ב) לכל שתי קבוצות $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ מתקיים $limA\cap limB\supseteq lim(A\cap B)$.

ג) לכל שתי קבוצות $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ מתקיים $limA\cup limB=lim(A\cup B)$.

ד) לכל סדרה של קבוצות $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $lim\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}limA_n$.

שאלה 5

תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה. הוכח כי $limA$ היא קבוצה סגורה.

שאלה 6

יהי (X,d) מרחב מטרי ותהי $A \subseteq X$. הוכח כי התנאים הבאים שקולים:
א) קיימים $x_0 \in X$ ו־$0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש־$A \subseteq B(x_0, r)$.
ב) לכל $x_0 \in X$ קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש־$A \subseteq B(x_0 r)$.
ג) קיים $0 < M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $x, y \in A$ מתקיים $d(x,y) < M$.
הערה: קבוצה A המקיימת תכונות אלה נקראת חסומה.

שאלה 7

קבע האם כל אחת מהקבוצות הבאות ב־$\mathbb{R}^n$ אם היא פתוחה או אם היא סגורה (הוכח/הפרך):
א) $C = \{(x,y) \mid x > 0, y < 0\}$
ב) $B = (0,1)$ ב־$\mathbb{R}$.
ג) כל המישור $\mathbb{R}^3$.
ד) $B = \left\{(x,y,z) \mid 3e^x - 35y^5 < 17y + z^2\right\}$ ב־$\mathbb{R}^3$.

שאלה 8

יהי (X,d) מרחב מטרי.
א) הוכיחו כי $x \in X$ נקודת הצטברות של $A \subseteq X$$\Leftrightarrow$קיימת סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ שכל איבריה שונים המתכנסת ל־x.
ב) הוכיחו כי $x \in X$ נקודת הצטברות של $A \subseteq X$ $\Leftrightarrow$ לכל $r > 0$ $B(x,r)$ מכיל אינסוף נקודות שונות של A.