תרגיל 7 פתרון

שאלה 1

נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ המיוצג ע"י רשימות שכנות, וצומת $s\in V$. לכל קשת $e\in E$ יש משקל שלם $w(e)$ (חיובי או שלילי). תארו אלגוריתם יעיל ככל האפשר המחשב, לכל צומת $v\in V$, את המשקל המינימלי של מסלול מ- s ל- v בעל <u>מספר זוגי</u> של קשתות. (הניחו שב- G אין מעגלים שליליים.)

<u>יעילות</u>: $O(|E|+|V|\log|V|)$ כמו דיקסטרה או אם לא מניחים שהקשתות אי-שליליות אז $O(|V||E|)$ כמו בלמן פורד

<u>הערה</u>: במקרה הזה היתה הנחיה מיוחדת שקשת שעוברים עליה פעם בכל כיוון היא מעגל באורך 2. לכן אין למעשה קשתות בעלות משקל שלילי.

<u>אלגוריתם</u>:
נסתכל על גרף דו-צדדי שבו לכל צומת מהגרף המקורי יש עותק בכל צד. עבור כל זוג צמתים i,j משני צדדים שונים, יש בינהם קשת אם בגרף המקורי יש קשת בין שני הצמתים שהם מייצגים. משקל קשת זאת זהה למשקל הקשת מהגרף המקורי. בגרף זה נמצא את המרחקים מעותק אחד של הצומת s לכל יתר הצמתים שבצד זה. אלה המרחקים הדרושים.

<u>הסבר</u>:
מכיון שהגרף שנבנה הוא דו-צדדי אז כל המסלולים בעלי אורך זוגי שמתחילים בצד אחד מסתיימים באותו צד. לכל מסלול בעל אורך זוגי בגרף המקורי, יש מסלול מתאים בגרף זה. כל מסלול בגרף זה מייצג מסלול בגרף המקורי.
מכיון שבגרף המקורי אין מעגלים בעלי אורך שלילי, אז גם בגרף הדו-צדדי אין מעגלים בעלי אורך שלילי. מספר צמתי הגרף הוא כפליים מספר צמתי הגרף המקורי ומספר קשתות הגרף הוא כפליים מספר קשתות הגרף המקורי. מכאן מתקבלת היעילות הרשומה.

פיתרון סעיף 1

אפשר לבצע DFS/BFS מתוחכם בו כל קודקוד יכול להיכנס למחסנית לכל היותר 3 פעמים (רק אם הגענו אליו מקשתות בשלוש צבעים שונים). נתאר כאן פיתרון שקול לפיתרון הזה, אך יותר אלגנטי.

סימון: $C = \{R, G, B\}$ תהייה קבוצת הצבעים של הקשתות.

פיתרון: נגדיר גרף חדש G' באופן הבא: קבוצת הקודקודים תהייה איחוד של שלושה עותקים של V: $V' = V_R \cup V_G \cup V_B$ באשר $V_c = \{v_c | v \in V\}$ לכל $c \in C$ (הסימון v_c הוא סימון פורמלי). הקשתות יוגדרו באופן הבא: לכל $(u,v) \in E$ בצבע c תהייה קשת מ-u_x ל-v_c לכל $c \neq x \in C$. (לדוגמא, אם (u,v) אדומה אז תהיינה קשתות מ-u_B ו-u_G אל v_R.) נסמן את קבוצת הקשתות החדשות ב-E'.
[שימו לב שלפי ההגדרה, קשתות שמובילות ל-v_c ב-G' מגיעות מקשתות בצבע c ב-G.]

נתאר את האלגוריתם (קלט: הגרף G ושני קודקודים u, v):

1. בנה את הגרף $G' = (V', E')$.
2. עבור $c \in \{R, G\}$:
   a. בצע BFS ב-G' שמתחיל מקודקוד u_c. אם הגענו לאחד מהקודקודים v_R, v_B, v_G:
      i. החזר שקיים מסלול כנדרש
3. החזר שאין מסלול כנדרש.

בגרף G' יש $3|V|$ קודקודים ו-$2|E|$ קשתות ולכן בנייתו דורשת $O(|V| + |E|)$ פעולות. מאותה סיבה, ביצוע BFS על G' עולה $O(3|V| + 2|E|) = O(|V| + |E|)$ פעולות. אנו עושים 2 BFS-ים כאלה ועוד מספר קבוע של פעולות ולכן סך כל העבודה היא $O(|V| + |E|)$.

האלגוריתם מחזיר שיש מסלול כנדרש אם"ם יש מסלול בין אחד מהקודקודים $\{u_R, u_G\}$ אל אחד מהקודקודים $\{v_R, v_G, v_B\}$. לכן, <u>כדי להוכיח נכונות</u> מספיק להראות שהנ"ל מתקיים אם"ם קיים מסלול מ-u ל-v בו קשתות סמוכות הן בצבעים שונים.

<u>נניח ש-$u = u^{(0)} \to u^{(1)} \to \cdots \to u^{(t)} = v$ מסלול ב-G</u> בו כל שתי קשתות סמוכות בצבעים שונים. נסמן לכל $i > 1$: $c_i = Color(u^{(i-1)}, u^{(i)})$, אזי לפי הגדרת E' יש קשת מ-$u^{(i)}_{c_i}$ ל-$u^{(i+1)}_{c_{i+1}}$ ב-G' (כי $c_{i+1} \neq c_i$) לכל $1 < i < t$. בנוסף, יש קשת מ-$u^{(0)}_c$ אל $u^{(1)}_{c_1}$ לכל $c \neq c_1$. תמיד קיים $c \in \{R, G\}$ כך ש-$c \neq c_1$ ולכן קיים מסלול ב-G' מאחד מהקודקודים $\{u_R, u_G\}$ אל אחד מהקודקודים $\{v_R, v_G, v_B\}$ (המסלול הוא $u_c = u^{(0)}_c \to u^{(1)}_{c_1} \to \cdots \to u^{(t)}_{c_t} = v_{c_t}$).

<u>נניח שיש מסלול ב-G':</u> $u_{c_0} = u^{(0)}_{c_0} \to u^{(1)}_{c_1} \to \cdots \to u^{(t)}_{c_t} = v_{c_t}$. אזי מהגדרת E' נובע שלכל $0 \leq i < t$ מתקיים $(u^{(i)}, u^{(i+1)}) \in E$, $Color(u^{(i)}, u^{(i+1)}) = c_{i+1}$ ו-$c_i \neq c_{i+1}$. לכן, $u = u^{(0)} \to u^{(1)} \to \cdots \to u^{(t)} = v$ הוא מסלול ב-G בו קשתות סמוכות הן בצבעים שונים.

הערה: ניתן להכליל את הפיתרון ל-k צבעים כך שיעבוד ב-$O\big(k(|V| + |E|)\big)$ פעולות.

פיתרון סעיף 2

שוב, במקום BFS/DFS מתוחכם, נמיר את הבעיה לבעיה בגרף אחר.

סימון: $C = \{R, G, B\}$ תהייה קבוצת הצבעים של הקשתות.

נגדיר גרף חדש $G' = (V', E')$: הקבוצה V' תורכב מ-8 עותקים של V: $V' = \cup_{X\subseteq C} V_X$ באשר $V_X = \{v_X | v \in V\}$ (הסימון v_X הוא פורמלי). הקשתות יוגדרו באופן הבא: אם $(u,v) \in E$ בצבע c ו-$X \subseteq C$, אז $(u_X, v_{X\cup\{c\}}) \in E'$. [אינטואיציה: האינדקס X ב-v_X זוכר באילו צבעים ביקרנו בדרך ל-v.]

האלגוריתם (קלט: הגרף G ושני קודקודים u, v):

1. בנה את G' מ-G.
2. בצע BFS ב-G' מהקודקוד u_ϕ. אם הגענו אל $v_{\{R,G,B\}}$ החזר שיש מסלול כדרוש, אחרת החזר שאין מסלול כנדרש.

בגרף G' יש $8|V|$ קודקודים ו-$8|E|$ קשתות ולכן בנייתו דורשת $O(|V| + |E|)$ פעולות. מאותה סיבה, ביצוע BFS על G' עולה $O(8|V| + 8|E|) = O(|V| + |E|)$ פעולות. סה"כ קיבלנו שהאלגוריתם מבצע $O(|V| + |E|)$ פעולות.

כדי להוכיח שהאלגוריתם עובד צריך להראות שקיים מסלול מ-u ל-v העובר דרך קשתות מכל הצבעים *אמ"ם* קיים ב-G' מסלול מ-u_ϕ ל-$v_{\{R,G,B\}}$.

<u>נניח שקיים מסלול $u = u^{(0)} \to u^{(1)} \to \cdots \to u^{(t)} = v$ העובר בקשתות בכל הצבעים</u>. נסמן $c_i = Color(u^{(i-1)}, u^{(i)})$ ונגדיר $X_i = \{c_1, c_2, \ldots, c_i\} = X_{i-1} \cup \{c_i\}$ ($X_0 = \phi$). אזי $X_t = \{R, G, B\}$. לפי הגדרת E', $\left(u^{(i-1)}_{X_{i-1}}, u^{(i)}_{X_i}\right) \in E'$ לכל $0 < i \le t$ ולכן יש מסלול מ-$u_\phi = u^{(0)}_{X_0}$ אל $v_{\{R,G,B\}} = u^{(t)}_{\{R,G,B\}} = u^{(t)}_{X_t}$, כדרוש.

<u>נניח שיש מסלול</u> $u_\phi = u^{(0)}_{X_0} \to u^{(1)}_{X_1} \to \cdots \to u^{(t)}_{X_t} = v_{\{R,G,B\}}$ ב-G'. אזי לכל $0 \le i < t$ מתקיים $\left(u^{(i)}, u^{(i+1)}\right) \in E$ ו-$X_{i+1} = X_i \cup \left\{Color\left(u^{(i)}, u^{(i+1)}\right)\right\}$. לכן ב-$G$ קיים המסלול, $u = u^{(0)} \to u^{(1)} \to \cdots \to u^{(t)} = v$. נראה שהוא עובר בקשתות מכל הצבעים. נסמן $c_i = Color\left(u^{(i)}, u^{(i+1)}\right)$. אזי $\{R, G, B\} = X_t = X_{t-1} \cup \{c_{i-1}\} = \cdots = X_0 \cup \{c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}\} = \{c_0, c_1, \ldots, c_{i-1}\}$ ולכן לכל $c \in \{R, G, B\}$ קיים $0 \le i < t$ כך ש-$c = c_i = Color\left(u^{(i)}, u^{(i+1)}\right)$. כדרוש.

תרגיל 4.

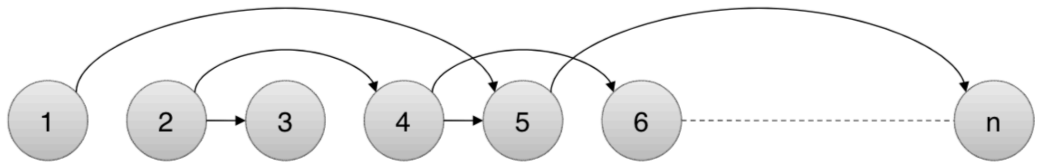
הוכחה:

← יהי T עפ"מ לפי w. לכן קיימת ריצה של קרוסקל המוצאת את T לפי w (ללא הוכחה). כלומר קיים סידור מונוטוני לא יורד של הקשתות לפי w שהרצת קרוסקל עליו מניבה את T. מהנחת התרגיל, סידור זה הוא מונוטוני לא יורד גם לפי w', ולכן מנכונות קרוסקל T הוא עפ"מ לפי w'.

→ ההוכחה זהה כאשר מחליפים את w, w'.

<u>מסקנה</u> – בבניית עפ"מ, מה שמשנה הוא סדר המשקלות ולא המשקלות עצמן.

תרגיל 5.



נחשב לכל צומת את אורך המסלול הארוך ביותר היוצא ממנו.
נחשב ערכים אלו במערך L שאורכו n.
נשים לב כי $L[n] = 0$, כיוון שמצומת זה לא יכולות לצאת קשתות.
כנ"ל לכל צומת ללא קשתות יוצאות.

נעבור על הצמתים מהסוף להתחלה, החל מצומת $n-1$ עד לצומת 1.
לכל צומת i בעל שכנים $j_1, j_2, \dots, j_k$, אורך המסלול המקסימלי היוצא ממנו הוא:

$$L[i] = 1 + \max\{\ L[j_1], L[j_2], \dots, L[j_k]\ \}$$

היות ולכל שכן j של צומת i גדול ממנו, כבר חישבנו עבורו את $L[j]$.
לכל צומת i, זמן החישוב של $L[i]$ הוא כזמן אשר לוקח לעבור על שכניו.