

קורס: 88-231-01,05,07  
מרצים: מ. כץ, ש. הורוביץ  
ד' תמוז תשע"א

## מבחן בפונקציות מרוכבות מועד א'

ענו על כל השאלות הבאות. ניקוד כל שאלה 18 נקודות. כל חומר עזר אסור פרט  
למחשבון פשוט. יש חובה לנמק כל תשובה!  
משך הבחינה שעתיים. בהצלחה!

1. מצאו את כל הפתרונות המרוכבים של המשוואה  $z^6 - 9iz^3 = 8$ . כתבו את הפתרונות  
בסגנון  $a + bi$ .

2. נניח ש-  $f(z)$  פונקציה שלימה כך שלכל  $z$  מרוכב  $|\sin f(z)| > 1$ . הוכיחו ש- $f(z)$   
קבועה.

3. חשבו  $\int_{\gamma} \frac{\bar{z}^3 - 8}{\bar{z} - 2} dz$  כאשר  $\gamma$  היא המסילה שמורכבת מהקטע הישר מ- $i$  עד  $0$ ,  
ואח"כ הקטע הישר מ- $0$  עד  $1$ .

4. חשבו:  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos 3x}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} dx$ . הצדיקו את תשובתכם.

5. נניח ש- $f(z)$  אנליטית ולא קבועה בסביבה מנוקבת של  $0$ .  
א. האם יתכן שטור לורן של  $f(z)$  סביב  $0$  מכיל רק חזקות  $n \geq 0$  וטור לורן של  
 $\frac{1}{f(z)}$  סביב  $0$  מכיל רק חזקות  $n \leq 0$ ? נמקו את תשובתכם.

ב. האם יתכן שטור לורן של  $f(z)$  סביב  $0$  מכיל רק חזקות  $n \geq 0$  וטור לורן  
של  $\frac{1}{f(z)}$  סביב  $0$  מכיל  $\infty$  חזקות שליליות? נמקו.

6. א. נגדיר מעגל  $M = \{z \in \mathbb{C} : |z-1|=3\}$ . הוכיחו שהנקודה הקרובה ביותר ל-0 במעגל  $M$  היא הנקודה  $z = -2$ .

ב. נגדיר  $f(z) = z^4 + z^2 - 2z + 1$ . קבעו כמה אפסים כולל ריבוי יש ל-  $f(z)$  בתוך העיגול  $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 3\}$ . הצדיקו את תשובתכם.