אלגברה לינארית, תשע"ו - פתרון תרגיל 7

1. קבעו האם הפונקציות הבאות הן התאמות לינאריות או לא.

(א) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x+y+z$.

כן.

שומר חיבור:

$$\begin{aligned}T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right) &= T\left(\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}\right)=x+x'+y+y'+z+z'=\\ &= (x+y+z)+(x'+y'+z')=T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

שומר כפל בסקלר:

$$T\left(c\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}cx\\cy\\cz\end{pmatrix}=cx+cy+cz=c\,(x+y+z)=cT\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

תוספת:

$$\ker T=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\,\middle|\,T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\,\middle|\,x+y+z=0\right\}=$$

$$.\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\-x-y\end{pmatrix}\,\middle|\,x,y\in\mathbb{R}\right\}$$

(הגרעין ממימד 2 ולכן נצפה שהתמונה תהייה ממימד 1...)

$$\mathrm{Im}T=\left\{T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\,\middle|\,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{x+y+z\,\middle|\,\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\mathbb{R}$$

לפי החישובים האלו, T היא על אבל היא לא חח"ע.

(ב) $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}$.

כן.

שומר חיבור:

$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}z+z'\\x+x'\\y+y'\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}z'\\x'\\y'\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+T\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

שומר כפל בסקלר:

$$T\left(c\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=T\begin{pmatrix}cx\\cy\\cz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}cz\\cx\\cy\end{pmatrix}=c\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}=cT\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

תוספת:

$$\ker T == \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}=0\right\}=$$
$$\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid x=y=z=0\right\}=\{0\}$$

(הגרעין יצא ממימד אפס, לכן נצפה שהתמונה תהיה ממימד 3...)

$$\mathrm{Im}T == \left\{T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\right\}=\left\{\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix} \mid x,y,x\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$\mathbb{R}^3$$

לפי החישובים האלו T היא חח"ע וגם על.

(ג) $T\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy\\z\end{pmatrix}$.

לא. למשל $T\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ ואילו $2T\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$.

(ד) $T\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י $T(a+ib)=\overline{a+ib}=a-ib$ (כאשר $a,b\in\mathbb{R}$).

כן.

(ה) $T\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x\\y+x\end{pmatrix}$.

כן.

שומר חיבור:

$$T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right) = T\left(\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+x'\\x+x'\\y+y'+x+x'\end{pmatrix}=$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ x \\ y+x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ x' \\ y'+x' \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

שומר כפל בסקלר:

$$T\left(c\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} cx \\ cy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ cx \\ cy+cx \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x \\ x \\ y+x \end{pmatrix} = cT\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

תוספת:

$$\ker T = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ x \\ y+x \end{pmatrix} = 0\right\} =$$

$$\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x = y = 0\right\} = \{0\}$$

(גרעין ממימד 0 ולכן נצפה שמימד התמונה יהיה 2...)

$$\text{Im}T = \left\{T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ x \\ y+x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}\right\}.$$

לפי זה, T היא חח"ע אבל היא לא על.

(ו) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot y \cdot z$.

לא. למשל $T\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 8$ ואילו $2T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$.

2. בחרו 3 מתוך ההתאמות הלינאריות שבשאלה הקודמת, חשבו להן גרעין ותמונה וקבעו האם הן חח"ע ועל.

3. (א) הוכיחו כי $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של $\mathbb{R}^2$.

פתרון:

נדרג את $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ אין משתנים חופשיים ולכן זו קבוצה בת"ל.

בנוסף, מכיוון שהיא מגודל 2 שזה המימד של $\mathbb{R}^2$ - אז מובטח שזהו בסיס.

(ב) מצאו נוסחה מפורשת להתאמה הלינארית $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

פתרון:

נבטא וקטור כללי $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של איברי הבסיס:

נפתור $\begin{pmatrix} 1 & -1 & x \\ 2 & 1 & y \end{pmatrix} \to \ldots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{y+x}{3} \\ 0 & 1 & \frac{y-2x}{3} \end{pmatrix}$

ולכן $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{y+x}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{y-2x}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

כעת נוכל לחשב:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T\left(\frac{y+x}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{y-2x}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{y+x}{3}T\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{y-2x}{3}T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{y+x}{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{y-2x}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} y-2x \\ 3y-3x \\ y+x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. נתון ש $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ הוא בסיס של $\mathbb{R}^3$. מצאו נוסחה מפורשת להתאמה $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ המקיימת:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 1 \\ T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= 2 \\ T\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

פתרון:

כדי למצוא צירוף לינארי של וקטור כללי נפתור את $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -2 & y \\ 0 & 0 & 2 & z \end{pmatrix}$

ונקבל שהפתרון הוא $\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ \frac{z}{2} \end{pmatrix}$ ולכן :

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x+y)Tv_1 + (y+z)Tv_2 + \frac{z}{2}Tv_3 = x + 3y + 2z$$

.