אינפי 1 – פתרון תרגיל 10

שאלה 1

א. תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ ומונוטונית בקטע (a,b). הוכיחו שהיא מונוטונית ב-$[a,b]$.

ב. הראו שהתמונה של הפונקציות $\sin,\cos$ היא הקטע $[-1,1]$.

<u>פתרון</u>

א. נוכיח עבור פונקציה מונוטונית עולה. לכל $x,y\in(a,b)$ מתקיים שאם $x\le y$ אזי $f(x)\le f(y)$. נותר להראות שני דברים:

1. לכל $c\in(a,b)$ מתקיים $f(a)\le f(c)$. ואכן, ראיתם בהרצאה משפט שלפיו (במקרה שלנו) מתקיים $\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. הפונקציה רציפה בקטע ולכן $f(a)=\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$. מהגדרת האינפימום מקבלים הדרוש.
2. לכל $c\in(a,b)$ מתקיים $f(c)\le f(b)$. מאותו משפט (ומרציפות) נובע כי $f(b)=\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ ומהגדרת הסופרמום מקבלים הדרוש.

ב. נראה עבור $\cos x$ (ההוכחה עבור סינוס היא אנלוגית לחלוטין). נתבונן בקטע $[0,\pi]$. קוסינוס מקיימת בקטע את תנאי משפט ערך הביניים. כמו כן, מתקיים $\cos 0=1,\ \cos\pi=-1$. לכן, לפי משפט ערך הביניים, לכל $x\in[-1,1]$ קיים $y\in[0,\pi]$ עבורו $\cos y=x$. כלומר, כל ערך בקטע $[-1,1]$ אכן מתקבל. בנוסף, מהגדרת הפונקציה ברור ששום ערך מחוץ לקטע זה אינו מתקבל, ולכן $[-1,1]$ זו בדיוק התמונה של הפונקציה קוסינוס.

מש"ל

שאלה 2

הוכיחו כי לא קיימים הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$

<u>פתרון</u>

$\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$, מצד שני:

אם $0<x<\frac{\pi}{2}$ אזי $\cos x$ הוא חיובי ושואף לאפס כאשר $x\to\frac{\pi}{2}^-$

אם $\frac{\pi}{2}<x<\pi$ אזי $\cos x$ הוא שלילי ושואף לאפס כאשר $x\to\frac{\pi}{2}^+$

לכן, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\tan x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\tan x=\infty$. מכאן, הגבול $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$ אינו קיים.

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+x^3}{\sin^3 x}$

<u>פתרון</u>

מתקיים

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x^3}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\left(\frac{1}{x}+1\right)}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3}{\sin^3 x}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}+1\right)=1\cdot\infty=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+x^3}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3}{\sin^3 x}\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}+1\right)=1\cdot(-\infty)=-\infty$$

מש"ל

<u>שאלה 3</u>

מצאו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

ב. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$

<u>פתרון</u>

א) $\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\right)\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=0 .$$

$\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2+x-1}{2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{2+x}\right)=0$. מכאן

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{1+x}{2+x}\right)}=e^0=1$.

ב) $\lim_{x\to2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}=e^{\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\ln\left(\frac{x}{2}\right)}=e^{\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\ln\left(\frac{x-2+2}{2}\right)}=e^{\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)}=e^{\lim_{x\to2}\frac{\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)}{2\left(\frac{x-2}{2}\right)}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

שימו לב: השוויון $\lim_{x\to2}\frac{\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)}{2\left(\frac{x-2}{2}\right)}=\frac{1}{2}$ מתקבל ע"י הצבה $t=x-2$ ומשימוש בשוויון הידוע (שהזכרנו בתרגול) $\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$.

מש"ל

<u>שאלה 4</u>

באילו נקודות הפונקציה $[x]$ רציפה?

<u>פתרון</u>

ראשית נתבונן בנקודות $a\in\mathbb{Z}$. עבורן מתקיים:

$$\lim_{x\to a^+}[x]=a$$
$$\lim_{x\to a^-}[x]=a-1$$

שכן, לכל $a<x<a+1$ מתקיים $[x]=a$, ולכל $a-1<x<a$ מתקיים $[x]=a-1$. לכל $a\in\mathbb{Z}$ מתקיים $a\neq a-1$ ולכן הגבולות החד צדדיים שונים ולכן הגבול לא קיים ומכאן הפונקציה אינה רציפה בכל נקודה $a\in\mathbb{Z}$.

כעת נתבונן ב$a\notin\mathbb{Z}$. לכל $[a]<x<[a]+1$ מתקיים $[x]=a$. מכאן נובע מיידית $\lim_{x\to a}[x]=[a]$ (איך?) ולכן הפונקציה רציפה בנקודות שאינן שלמות.

תשובה סופית: הפונקציה $[x]$ רציפה בדיוק בכל הנקודות $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

מש"ל

שאלה 5

א. תהי פונקציה ממשית f כך ש: $f(x)=-f(-x)$ לכל $x\neq 0$. נתון ש- f רציפה באפס. הוכיחו ש- $f(0)=0$.

ב. תנו דוגמא לפונקציה כזו, וודאו שאכן היא מתאפסת באפס.

פתרון

א. נתון $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$ נשתמש בהגדרת הגבול לפי היינה. נבנה שתי סדרות $0\neq x_n=\frac{1}{n}\to 0$, $0\neq y_n=-\frac{1}{n}\to 0$ אבל אז לפי היינה בשל הרציפות חייב להתקיים $f(0)=\lim f(x_n)=\lim f(y_n)$. לכן

$$f(0)=\lim f(x_n)=\lim f\left(\frac{1}{n}\right)=\lim\left(-f\left(-\frac{1}{n}\right)\right)=\lim\left(-f\left(y_n\right)\right)=-\lim f\left(y_n\right)=-f(0)$$

ולכן $f(0)=-f(0)\Rightarrow f(0)=0$.

ב. $\sin(x)=-\sin(-x)$ והיא רציפה בכל הממשיים. אכן $\sin(0)=0$.

מש"ל

שאלה 6

מיינו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות:

a. $\sin\left(\frac{1}{\ln x^2}\right)$

פתרון

נקודות האי רציפות נובעות מאיפוס המכנה ומנקודת אי ההגדרה של ה $\ln$. לכן נקודות אי הרציפות הינן $-1,0,1$.

עבור $x=0$, $\lim_{x\to 0}\ln x^2=-\infty$ ולכן $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln x^2}=0$ ומכיוון ש $\sin$ רציפה באפס ההרכבה שואפת לאפס, כלומר $\lim_{x\to 0}\sin(\frac{1}{\ln x^2})=0$ ולכן זו אי רציפות סליקה.

עבור $x=1$, נראה שהגבול החד צדדי $\lim_{x\to 1^+}\sin(\frac{1}{\ln x^2})=0$ אינו קיים ולכן זו אי רציפות מהמין השני. ניקח את הסדרות $x_k=\sqrt{e^{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi k}}}$, $y_k=\sqrt{e^{\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}}}$ קל לראות שסדרות אלה שואפות לאחד מכיוון ש $e^0=1$, וגדולות ממש מאחד. מתקיים $\sin\left(\frac{1}{\ln {x_k}^2}\right)=1$, $\sin\left(\frac{1}{\ln {y_k}^2}\right)=-1$ ולכן הגבול החד צדדים לא קיים.

עבור $x=-1$, זו נקודת אי רציפות מהמין השני עם הוכחה דומה.

b. $\cos\left(\frac{3x-2}{|3x-2|}\right)$

<u>פתרון</u>

נקודת אי הרציפות היחידה היא $x=\frac{2}{3}$. נחשב את הגבולות החד צדדיים:

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\cos\left(\frac{3x-2}{|3x-2|}\right)=\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\cos\left(\frac{3x-2}{3x-2}\right)=\lim_{x\to\frac{2}{3}^+}\cos 1=\cos 1\ ;$$

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}^-}\cos\left(\frac{3x-2}{|3x-2|}\right)=\lim_{x\to\frac{2}{3}^-}\cos\left(\frac{3x-2}{-(3x-2)}\right)=\lim_{x\to\frac{2}{3}^-}\cos(-1)=\cos(-1)\ .$$

הגבולות החד צדדיים קיימים, סופיים ושונים ולכן זו נקודת אי רציפות ממין ראשון.

c. $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$

<u>פתרון</u>

נקודות אי הרציפות הן $x_k=\pi k$. $(\sin x)^2$ תמיד חיובי, ולכן $-\frac{1}{(\sin x)^2}$ שואף

למינוס אינסוף ולכן $e^{-\frac{1}{(\sin x)^2}}$ שואף לאפס. לכן כל נקודות אי הרציפות הינן סליקות.

מש"ל

<u>שאלה 7</u>

תהיינה f,g פונקציות רציפות בקטע $[0,1]$ המקיימות $g([0,1])=[0,1]$ ו- $f([0,1])\subseteq[0,1]$. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ שעבורה $f(x_0)=g(x_0)$.

<u>פתרון</u>

נתבונן בפונקציה $h(x)=f(x)-g(x)$. h רציפה ב $[0,1]$ כהפרש רציפות.

$g([0,1])=[0,1]$. לכן קיימות $x_1,x_2\in[0,1]$ שונות כך ש $g(x_1)=0,\ g(x_2)=1$.

מצד שני $f([0,1])\subseteq[0,1]$ ולכן בהכרח $f(x_1)\ge 0,\ f(x_2)\le 1$. מכאן,

$$h(x_1)=f(x_1)-g(x_1)=f(x_1)-0=f(x_1)\ge 0$$

$$h(x_2)=f(x_2)-g(x_2)=f(x_2)-1\le 0$$

לכן $h(x_1)\ge 0\ge h(x_2)$. בה"כ $x_2>x_1$ (אחרת פשוט מתבוננים בקטע $[x_2,x_1]$).

h רציפה ב $\left[x_1,x_2\right]$ (שכן אפילו רציפה ב$\left[0,1\right]$) וכמו כן $h(x_1)\ge 0\ge h(x_2)$.
לכן ממשפט ערך הביניים נקבל שקיימת נקודה $x_0\in\left[x_1,x_2\right]\subseteq\left[0,1\right]$ שעבורה $f\left(x_0\right)-g\left(x_0\right)=h(x_0)=0$. מכאן $f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)$.

מש"ל