

מבחן מועד א' – 86-147 חדו"א 1 לאודיסאה – 10/02/25

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משך המבחן: שלוש שעות

מרצה: דר' ארז שיינר

כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100

ענו על כל השאלות

משקל כל שאלה: 20 נק'

יש לכתוב את התשובות על גבי טופס המבחן במקום המתאים בלבד. מותר לכתוב משני צידי הדף.

מחברות הטיוטה מושלכות ולא תבדקנה.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\text{א. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1)^3 (2 - e^{2x})^2}{(1 - \cos(5x)) \ln(1 + 7x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1)^3 (2 - e^{2x})^2}{(1 - \cos(5x)) \ln(1 + 7x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} \right)^3 \cdot (2 - e^{2x})^2 \cdot \frac{(5x)^2}{1 - \cos(5x)} \cdot \frac{7x}{\ln(1 + 7x)} \cdot \frac{3^3}{5^2 \cdot 7} = 1 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{3^3}{5^2 \cdot 7}$$

$$\text{ב. } \lim_{x \rightarrow \pi} (-\cos(x))^{\frac{1}{x-\pi}}$$

כיוון ש $\lim_{x \rightarrow \pi} (-\cos(x)) = 1$ ניתן להשתמש בכלל ה:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \cdot (-\cos(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow \pi} -\frac{1 + \cos(x)}{x - \pi} = \left\{ \frac{0}{0}, L'Hopital \right\} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{1} = 0$$

ולכן

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (-\cos(x))^{\frac{1}{x-\pi}} = e^0 = 1$$

$$\text{ג. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{n} = \{t = \sqrt{n}\} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^t}{t^2} \stackrel{\text{סדר גודל}}{=} \infty$$

2.

א. חשבו את $\int \sin^2(x) dx$.

נפתור בשתי דרכים:

דרך ראשונה בעזרת זהויות –

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$$

ולכן

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x) + C$$

דרך שנייה בעזרת חזרה למקורות:

$$\int \sin^2(x) dx = \int \sin(x) \cdot \sin(x) dx = \left\{ \begin{array}{l} f' = \sin(x) \\ f = -\cos(x) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} g = \sin(x) \\ g' = \cos(x) \end{array} \right\} = -\sin(x) \cos(x) + \int \cos^2(x) dx$$

לכן

$$\int \sin^2(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + \int (1 - \sin^2(x)) dx$$

נעביר אגף

$$2 \int \sin^2(x) dx = -\sin(x) \cos(x) + x$$

והגענו לאותה תשובה.

ב. חשבו את $\int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(x)}{\sin^2(x)} dx &= \left\{ \begin{array}{l} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x) dx \end{array} \right\} = - \int \frac{dt}{1-t^2} = \{\text{שברים חלקיים}\} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \ln|t-1| - \frac{1}{2} \ln|t+1| + C = \frac{1}{2} \ln|\cos(x)+1| - \frac{1}{2} \ln|\cos(x)-1| + C \end{aligned}$$

3.

א. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\ln(1+e^x) = 2x - e^x$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה ובדוק כמה חיתוכים יש לה עם ציר האיקס:

$$h(x) = \ln(1+e^x) - 2x + e^x$$

$$h'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - 2 + e^x = \frac{e^x - 2 - 2e^x + e^x + e^{2x}}{1+e^x} = \frac{e^{2x} - 2}{1+e^x}$$

הנגזרת מתאפסת כאשר

$$e^{2x} = 2$$

$$2x = \ln(2)$$

$$x = \frac{\ln(2)}{2}$$

מימין לזה הנגזרת חיובית, ומשמאל שלילית.

כלומר h עולה בתחום $\left[\frac{\ln(2)}{2}, \infty\right)$ ויורדת בתחום $\left(-\infty, \frac{\ln(2)}{2}\right]$, ומקבלת את המינימום המוחלט שלה בנקודה

$$\left(\frac{\ln(2)}{2}, h\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)\right) \approx (0.34, 1.6)$$

כיוון שהערך המינימלי של הפונקציה הוא חיובי, היא לעולם אינה חותכת את הציר, ולמשוואה המקורית אין פתרונות כלל.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\ln(1 + e^x) = 2x + e^x$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה בדומה לסעיף קודם:

$$g(x) = \ln(1 + e^x) - 2x - e^x$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{e^x}{1 + e^x} - 2 - e^x = \frac{e^x - 2 - 2e^x - e^x - e^{2x}}{1 + e^x} = \frac{-2 - 2e^x - e^{2x}}{1 + e^x} = -\frac{e^{2x} + 2e^x + 1 + 1}{1 + e^x} = \\ &= -\frac{(e^x + 1)^2 + 1}{1 + e^x} < 0 \end{aligned}$$

כיוון שהנגזרת תמיד שלילית, הפונקציה תמיד יורדת, ויש לכל היותר חיתוך אחד עם הציר.

נחשב גבולות בקצות תחום הירידה:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) - 2x - e^x = \{0 + \infty - 0\} = \infty$$

ולכן קיימת נקודה מעל ציר האיקס.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(1 + e^x) - 2x - e^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x \left(\underbrace{\frac{\ln(1 + e^x)}{e^x}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{חישוב למטה}}} - \underbrace{\frac{2x}{e^x}}_{\substack{\rightarrow 0 \\ \text{סדרי גודל}}} - 1 \right) = \{\infty \cdot (0 - 0 - 1)\} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} = \left\{ \frac{\infty}{\infty}, L'Hopital \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + e^x} = \left\{ \frac{1}{\infty} \right\} = 0$$

לכן קיימת גם נקודה מתחת לציר, וכיוון שהפונקציה רציפה כצירוף אלמנטריות בתחום הגדרתן ולפי משפט ערך הביניים יש נק' חיתוך.

סה"כ יש נקודת חיתוך יחידה, כלומר פתרון יחיד למשוואה המקורית.

4. תהי f פונקציה הגזירה בנק' x_0 , ונביט ב $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

א. הוכיחו או הפריכו: למשוואה $f(x) = g(x)$ יש בדיוק פתרון אחד.

הפרכה:

נבחר $f(x) = 0$ הפונקציה הקבועה אפס.

נקבל כי המשיק

$$g(x) = 0 + 0 \cdot (x - x_0) = 0$$

לכן למשוואה $f(x) = g(x)$ יש אינסוף פתרונות

ב. הוכיחו או הפריכו: קיימת סביבה של x_0 בה למשוואה $f(x) = g(x)$ יש בדיוק פתרון אחד.

אותה ההפרכה מסעיף א', שהרי כיוון שמשיק שווה ממש לפונקציה, בכל סביבה למשוואה יש אינסוף נקודות חיתוך.

5. תהי סדרה a_n המקיימת לכל n כי $a_{n+1} = \frac{6}{a_n} + 1$, וכי $a_1 = 1$. נסמן את סדרת האיברים במקומות הזוגיים $b_n = a_{2n}$.

א. הוכיחו כי b_n מונוטונית.

ראשית נחשב את b_1, b_2

$$b_1 = a_2 = \frac{6}{a_1} + 1 = \frac{6}{1} + 1 = 7$$

$$b_2 = a_4 = \frac{6}{a_3} + 1 = \frac{6}{\frac{6}{a_2} + 1} + 1 = \frac{6}{\frac{6}{7} + 1} + 1 = 4.23 \dots$$

כלומר נדמה שהסדרה מונוטונית יורדת, נוכיח זאת באינדוקציה (כאשר את שלב הבדיקה עברנו הרגע)

יהי n עבורו $b_{n+1} < b_n$ נוכיח כי $b_{n+2} < b_{n+1}$

צ"ל כי

$$a_{2n+4} < a_{2n+2}$$

צ"ל כי

$$\frac{6}{a_{2n+3}} + 1 < \frac{6}{a_{2n+1}} + 1$$

(קל להוכיח באינדוקציה כי כל איברי הסדרה חיוביים: $a_1 > 0$ ואם $a_n > 0$ אזי $a_{n+1} = \frac{6}{a_n} + 1 > 0$)

כיוון שאיברי הסדרה חיוביים, אי השוויון לעיל שקול לאי השוויון

$$a_{2n+3} > a_{2n+1}$$

שזה שקול ל

$$\frac{6}{a_{2n+2}} + 1 > \frac{6}{a_{2n}} + 1$$

וזו שקול לכך ש

$$a_{2n+2} < a_{2n}$$

אבל זו בדיוק הנחת האינדוקציה!

$$b_{n+1} < b_n$$

ב. חשבו את גבול הסדרה b_n .

כיוון שהסדרה יורדת וחיובית (הוכחנו בסעיף א') קיים לה גבול סופי, נסמנו $b_n \rightarrow L$

על מנת לחשב את הגבול, נייצר נוסחת נסיגה לסדרה הזו

$$b_{n+1} = a_{2n+2} = \frac{6}{a_{2n+1}} + 1 = \frac{6}{\frac{6}{a_{2n}} + 1} + 1 = \frac{6}{\frac{6}{b_n} + 1} + 1$$

נשאיף את שני צידי נוסחת הנסיגה.

$$\lim b_{n+1} = \lim \frac{6}{\frac{6}{b_n} + 1} + 1$$

כיוון שהסדרה חיובית $L \geq 0$. אם $L = 0$ מקבלים מצד שמאל אפס, ומצד ימין 1 בסתירה, לכן $L \neq 0$ ואפשר להציבו

$$L = \frac{6}{\frac{6}{L} + 1} + 1$$

נכפול ב $\frac{6}{L} + 1$ ונקבל

$$6 + L = 6 + \frac{6}{L} + 1$$

$$L = \frac{6}{L} + 1$$

נכפול ב L

$$L^2 = 6 + L$$

$$L^2 - L - 6 = 0$$

$$L_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = 3, -2$$

כאמור $L \geq 0$ ולכן הפתרון $L = -2$ נפסל וסה"כ נקבל כי $L = 3$ כלומר

$$b_n \rightarrow 3$$

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

זו סדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{1}{1+x}$ הרציפה בקטע $[0,1]$ ולכן לפי המשפט מהכיתה על סכומי רימן

$$a_n \rightarrow \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln|1+x|]_0^1 = \ln(2)$$

ב. הוכיחו כי $\sqrt{8} > e$.

אפשר היה לקרב כל אחד מהצדדים לפי טיילור, להוכיח כי טעות השגיאה קטנה מספיק על מנת להבטיח שהערך משמאל גדול מהערך הימני.

אבל אפשר היה גם להשתמש בטריק הבא:

נעלה בריבוע את שני האגפים, כיוון שהם חיוביים נקבל אי שיוויון שקול:

$$8 > e^2$$

ולכן מספיק לעשות פיתוח טיילור ל $f(x) = e^x$ סביב הנקודה המצוייה $a = 0$ ולקרב בנקודה הרצוייה $x = 2$

ננחש $n = 5$

$$P_5(f, 0)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$$

ולכן הקירוב הוא

$$e^2 = f(2) \approx P_5(2) = 1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} = 7 + \frac{4}{15}$$

כעת נותר להוכיח כי הטעות קטנה מספיק, כלומר נרצה להוכיח כי

$$|R_5| < \frac{11}{15}$$

ואז

$$e^2 = 7 + \frac{14}{15} + R_5 < 8$$

כפי שרצינו להוכיח.

אכן לפי לגרנאז' קיימת $0 < c < 2$ כך ש

$$R_5 = \frac{e^c}{6!} (2 - 0)^6$$

ולכן

$$|R_5| = e^c \cdot \frac{2^6}{6!} \leq e^2 \cdot \frac{2^6}{6!} < 3^2 \cdot \frac{2^6}{6!} = \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{11}{15}$$

כלומר באסה, הניחוש לא הצליח! ננסה כעת עבור $n = 6$

$$e^2 \approx 1 + 2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} = 7 + \frac{16}{45}$$

$$|R_6| < 3^2 \cdot \frac{2^7}{7!} = \frac{8}{35} < \frac{8}{24} = \frac{1}{3} = \frac{15}{45} < \frac{16}{45}$$

ובכך הוכחנו כי $e^2 < 8$