



תרגיל 2: משוואות לינאריות מסדר ראשון (מקדמים לינאריים, הנוסחא הכללית), ואי-לינאריות מסדר ראשון (משוואות מדויקות, גורם אינטגרציה, ברנולי, קלרו)

משוואות מדויקות

פתרו את המד"ר הבאות ע"י שימוש בשיטת הפוטנציאל:

$$1. (2xe^{3y} + e^x)dx + (3x^2e^{3y} - y^2)dy = 0$$

$$2. (\cos x \cos y + \sin^2 x)dx - (\sin x \sin y + \cos^2 y)dy = 0$$

$$3. (x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0$$

מציאת גורם אינטגרציה

פתרו את המד"ר הבאות ע"י מציאת גורם אינטגרציה מתאים, הפיכתן למדויקות ופתרון

בשיטת הפוטנציאל:

$$4. \frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 4$$

$$5. x \frac{dy}{dx} + 3y = x^2$$

$$6. x \frac{dy}{dx} + 2xy = xe^{-2x}$$

$$7. \frac{dy}{dx} - y \cdot \tan x = 1$$

פתרון סינגולארי

מצאו פתרונות כלליים (הפרדת משתנים) ופתרונות סינגולאריים (ע"י ניחוש ובדיקה)

למשוואות הדיפרנציאליות הבאות והראו שהפתרונות הסינגולאריים לא יכולים

להתקבל מהפתרונות הכלליים עבור כל בחירה של הקבוע השרירותי.

$$8. x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$$

$$9. ydy + (xy^2 - 8x)dx = 0$$

$$10. y' * \sin(x) = y * \ln(y)$$

משוואת קלרו

פתרו את המד"ר הבאה ע"י כתיבתה כמשוואת קלרו:



$$y = y'x + (y')^2 .11$$

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{\frac{4}{(y')^2} + 1} .12$$

משוואות שונות

פתרו את המשוואות הבאות:

$$xy' = 2y + x^3 e^x$$

$$y(x=1) = 0 .13$$

$$x dy + y dx = x^3 y^6 dx .14$$

$$y' + y = 2 + 2x .15$$

$$(x^2 - y) dx - x dy = 0 .16$$

$$(x + 2y - 3) dx + (2x - y - 1) dy = 0 .17$$

$$(y^3 = vx \text{ - הצבה - רמז}) \quad (xy^3 - y^3 - x^2 e^x) dx + 3xy^2 dy = 0 .18$$

$$\frac{y}{\sqrt{1+(y')^2}} - x \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = Const .19$$

$$(x - 2 \sin y - 3) dx - (2x - 4 \sin y - 3) \cos y dy = 0 .20$$



בעיות

נסחו משוואה דיפרנציאלית מתאימה עבור כל בעיה ופתרו אותה. השתמשו בנתונים הנוספים כדי למצוא את קבועי האינטגרציה.

21. גוף נופל אנכית בתוך תווך תחת השפעת כוח הכבידה mg וכוח החיכוך הפרופורציוני למהירותו $k v$. הגוף מתחיל ממהירות התחלתית v_0 .

- נסחו מד"ר מתאימה עבור המהירות של הגוף ע"י שימוש בחוק ניוטון (המהירות לא יחסותית...).
- פתרו את המשוואה. השתמשו בתנאי ההתחלה כדי למצוא את הקבוע שקיבלתם.
- ע"י פיתוח לטור של האקספוננט קבלו את $v(t)$ בגבול $t \rightarrow 0$. מה תהיה מהירות הגוף בגבול $t \rightarrow \infty$ (שתסומן כ- v_∞)?
- ציירו את הפתרון על גרף $v(t)$ עבור שני ערכים שונים איכותית של v_0 , כלומר עבור $v_0 < v_\infty$ ועבור $v_0 > v_\infty$.

22. מצאו את "הפתרון הכללי" של $y' = \sqrt{y}$. כמו כן:

- מצאו פתרון פרטי המקיים את התנאי $y(x=0) = 0$ (כלומר, מצאו את הקבוע).
- מצאו פתרון נוסף למשוואה שאינו יכול להתקבל מ"הפתרון הכללי" שמצאתם (פתרון סינגולרי) והמתאים גם לתנאי המצוין.
- ציירו גרפים של "הפתרון הכללי" עבור מספר ערכים של הקבוע השרירותי. שימו לב שכל אחד מהם משיק לפתרון הסינגולרי. כלומר, ישנם שני פתרונות העוברים דרך כל נקודה על ציר ה- x ; ובפרט, ישנם שני פתרונות המקיימים $y(x=0) = 0$.
- הניחו שקצב הגידול dN/dt של מושבת חידקים הנו פרופורציוני לשורש הריבועי של מספר החידקים הקיימים במושב באותו הרגע. אם אין כלל חידקים ב- $t = 0$, כמה חידקים ישנם בזמן t ? שימו לב ש"הפתרון הכללי" נותן תשובה לא הגיונית.

23. מצאו את הצורה של מראה בעלת התכונה הבאה: קרניים המגיעות אליה מהנקודה O הנמצאת על ציר הסימטריה שלה מוחזרות כאלומת קרניים מקבילות. רמז: הספר של *BOAS*, עמוד 352, שאלות