

תרגיל 4

1. תהי $A = \mathbb{R} \cup \{p\}$ עבור $p \notin \mathbb{R}$, עם הטופולוגיה הבאה: $\tau = P(\mathbb{R}) \cup \{B \subseteq A : |B^c| \leq \aleph_0\}$. הוכיחו שזוהי אכן טופולוגיה. פתרון:

נבדוק את 3 התכונות:

1. $\emptyset \in \tau$ ולכן $\emptyset \in P(\mathbb{R})$. בנוסף, $|A^c| \leq \aleph_0$ ולכן $A \in \tau$.

2. איחודים כלשהם: יהיו $O_i \in \tau$. אם כולן תת קבוצות של \mathbb{R} , אז כך גם האיחוד, ולכן הוא שייך ל- τ . אחרת, יש i כך ש- $|O_i^c| \leq \aleph_0$. אז מתקיים: $(\bigcup O_i)^c \subseteq O_i^c$, ולכן הוא בן מניה. מכאן ש- $\bigcup O_i \in \tau$.

3. חיתוכים סופיים: יהיו $O_1, \dots, O_n \in \tau$. אם אחד מהם מוכל ב- \mathbb{R} , אז כך גם החיתוך. אחרת, לכלם יש משלים בן מניה, ואז $|O_1^c \cup \dots \cup O_n^c| \leq \aleph_0$ ולכן $|(O_1 \cap \dots \cap O_n)^c| = |O_1^c \cup \dots \cup O_n^c| \leq \aleph_0$.

2. (א) תהי X קבוצה עם הטופולוגיה הקו-סופית. נניח שיש קבוצה $X, A \neq \emptyset$ שהיא סגורה. הוכיחו כי X סופית.

פתרון. בטופולוגיה הקו-סופית. קבוצה היא סגורה אם ורק אם היא סופית. אם A סגורה אז A סגורה וגם A^c סגורה. כלומר A סופית וגם A^c סופית. ולכן $X = A \cup A^c$ גם סופית.

(ב) יהי (X, τ) מרחב טופולוגי אינסופי. נניח שהקבוצה הפתוחה האינסופית היחידה היא X . האם (X, τ) היא הטופולוגיה הטריויאלית? (למחשבה: האם יש דוגמה כזאת שבה יש אינסוף קבוצות פתוחות?)

פתרון. לא. כי אפשר לקחת כל קבוצה אינסופית X ואת $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ כאשר $a \in X$. קל לבדוק שזו טופולוגיה. יש גם דוגמה עם אינסוף קבוצות פתוחות. ניקח $X = \mathbb{N}$. נסמן $A_n = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\}$. כלומר $A_n = \mathbb{N} \cap (0, n]$. ברור שכל A_n היא קבוצה סופית. קל לוודא ש- $\tau = \{A_n\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$ היא אכן טופולוגיה.

3. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי. הוכיחו כי התנאים הבאים שקולים:

(א) הטופולוגיה טריויאלית.

(ב) לכל סדרה $x_n \rightarrow x$ ו- $x \in X$ מתקיים $x_n \rightarrow x$ (כל סדרה מתכנסת לכל איבר)

פתרון. נניח שהטופולוגיה טריויאלית. ניקח סדרה x_n כלשהיא ואיבר x . צריך להוכיח ש- $x_n \rightarrow x$. תהי U קבוצה פתוחה כלשהיא כך ש- $x \in U$. היות שהטופולוגיה טריויאלית, בהכרח $U = X$. ולכן בוודאי $\frac{x_n \in X}{x_n \in X}$ החל מ- n מסוים (במקרה $n = 1$)

ולכן $x_n \rightarrow X$ בכיוון השני, נניח שכל סדרה מתכנסת לכל מספר אבל הטופולוגיה לא טריוויאלית. אז יש קבוצה פתוחה $X, U \neq \emptyset$ אז ניקח איזשהיא סדרה x_n שכל איבריה ב $X \setminus U$ ואיבר $x \in U$ אבל לפי הנתון $x_n \rightarrow x$ ולכן משלב מסוים $x_n \in U$ בסתירה.

4. נגדיר על \mathbb{N} את הטופולוגיה

$$\tau = \{O_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{N}\}$$

כאשר

$$O_n = \{n, n+1, n+2, \dots\}$$

(א) הוכיחו כי (\mathbb{N}, τ) אכן מרחב טופולוגי.

פתרון. צריך להוכיח את שלושת האקסיומות של מרחב טופולוגי.

i. איחוד של פתוחות הוא פתוח: נסתכל על איחוד $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ של פתוחות. את

הקבוצות הריקות באיחוד הזה וודאי אפשר להשמיט. לכן נניח כי לכל $i \in I$ מתקיים $U_i \neq \emptyset$. אם האיחוד שווה לכל \mathbb{N} זו בוודאי קבוצה פתוחה. לכן ניתן להניח כי $\bigcup_{i \in I} U_i \subsetneq \mathbb{N}$ בפרט, אף אחת מהקבוצות הפתוחות האלה היא לא \mathbb{N} .

לכן אפשר להניח שלכל $i \in I$ יש n_i כך ש $U_i = O_{n_i}$. ניקח $a \in \mathbb{N}$ כך ש $a \notin U$. נשים לב ש a חסם מלרע של U כי אם $b \in U$ עם $b < a$ אז $b \in O_{n_i}$ עבור i כלשהוא ואז בוודאי $a \in O_{n_i} \subseteq U$. לכן U קבוצה של שלמים שחסומה מלרע ולכן יש לה מינימום, נסמן אותו $m = \min U$. כעת יש i כך ש

$$m \in O_{n_i}$$

נשים לב שכל איבר קטן מ m לא נמצא ב U (מינימום כאמור). כל איבר גדול מ m כן נמצא ב U (כי הוא ב O_{n_i}) ולכן

$$U = O_m$$

שהיא קבוצה פתוחה כנדרש.

ii. חיתוך שתי קבוצות פתוחות הוא קבוצה פתוחה: נניח U ו V פתוחות. אם אחת מהן היא \emptyset או \mathbb{Z} הטענה מיידיית. אחרת יש n, m כך ש

$$U = O_n \quad V = O_m$$

ואז ברור ש

$$U \cap V = O_{\max\{n, m\}}$$

שזו קבוצה פתוחה.

iii. \emptyset, \mathbb{Z} הן קבוצות פתוחות: ברור מההגדרה.

(ב) מצאו סדרה שמתכנסת לכל איבר $n \in \mathbb{N}$.

פתרון. ניקח את הסדרה $a_n = n$. יהי $x \in \mathbb{N}$, נוכיח ש $a_n \rightarrow x$. תהי U קבוצה פתוחה כך ש $x \in U$. אם $U = \mathbb{N}$ אז בוודאי $a_n \in \mathbb{N}$ החל מ $n = 1$. אם $U = O_m$ אז $a_n \in U$ החל מ $n = m$. נשים לב ש $U \neq \emptyset$ כי $x \in U$.

5. תהי (X, τ_{cof}) קבוצה אינסופית עם הטופולוגיה הקוסופית עליה. תהי $\{x_n\}$ סדרה שכל איבריה שונים. הוכיחו שלכל $x \in X$, $x_n \rightarrow x$.

הוכחה: תהי O קבוצה פתוחה שמכילה את x . אז O^c סופית. מכיוון שכל איברי $\{x_n\}$ שונים זה מזה, יש לכל היותר מספר סופי של איברים x_1, \dots, x_m שנמצאים ב O^c . לכן החל מ x_{m+1} , כל איברי הסדרה נמצאים ב O .