אלגברה ליניארית להנדסה 83-110 תש״ע

פתרון תרגיל 7

<u>באדיבות שי ידרמן. שפצורים : מיטל אליהו</u>

1. הראו כי הווקטורים $v_3=\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix}$, $v_2=\begin{Bmatrix}1\\1\\2\end{Bmatrix}$, $v_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$ מהווים בסיס ל-$\mathbb{R}^3$ והציגו את הוקטור $v=\begin{Bmatrix}6\\9\\14\end{Bmatrix}$ כצ״ל של וקטורי הבסיס הנ״ל.

<u>פתרון</u>

יש להראות כי הווקטורים : $v_3=\begin{Bmatrix}1\\2\\3\end{Bmatrix}$, $v_2=\begin{Bmatrix}1\\1\\2\end{Bmatrix}$, $v_1=\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}$ הם בסיס ל-$\mathbb{R}^3$ ולהביע את $v=\begin{Bmatrix}6\\9\\14\end{Bmatrix}$ כצ״ל שלהם.

אנחנו יודעים כי לפי השלישי חינם מספיק לנו להראות ששלושת הווקטורים הם בת״ל ואז היות והמימד של $\mathbb{R}^3$ הוא 3 ולכן מספיק להראות שהווקטורים הם בת״ל. אולם ישנה עוד דרך : לפי משפט מהכיתה מספיק להראות שכל ווקטור ניתן להציג כצ״ל יחיד של איברי הבסיס.

ולכן אם נחפש את הצ״ל של הוקטור $v=\begin{Bmatrix}6\\9\\14\end{Bmatrix}$ נחבר את המטריצה הבאה : $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\1&1&2&9\\1&2&3&14\end{array}\right]$ ונראה כי קיים צ״ל יחיד המקיים זאת ואז נסיק כי הווקטורים אינם ת״ל ונמצא יחד עם זאת את הצירוף הליניארי שלהם עבור הווקטור v.

נבצע :

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\1&1&2&9\\1&2&3&14\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&0&1&3\\0&1&2&8\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&1&2&8\\0&0&1&3\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-3R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&6\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right]\xrightarrow[R_1-R_3]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{array}\right].$$

קיבלנו את הצירוף הליניארי הבא : $v=v_1+2v_2+3v_3$, כלומר קיבלנו שקיים צ״ל יחיד שייתן לנו את הווקטור המבוקש ולכן הקבוצה הנ״ל היא בסיס.

יש לציין כי במקום זאת היינו יכולים לבדוק אם הווקטורים הם בת״ל ע״י פתרון המערכת : $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&2&0\\1&2&3&0\end{array}\right]$ כשהיינו מדרגים היינו מקבלים :

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\1&1&2&0\\1&2&3&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&1&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&2&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-3R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_1-R_3]{R_1-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

מה שאומר שהוקטורים הם אכן בת״ל ולכן לפי השלישי חינם – בסיס.

2. מצאו בסיס ומימד לתתי המרחבים הבאים :

א. $sp=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $sp=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\5\\5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

פתרון

יש למצוא בסיס ומימד לשני תתי המרחב הבאים :

א. $sp=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$

ב. $sp=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\2\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\5\\5\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

א. נדרג את המטריצה ששורותיה הם הוקטורים :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\2&1&1&0\\1&1&1&1\\1&2&3&4\\0&1&2&3\end{pmatrix}\underset{R_4\leftarrow R_4-R_1}{\overset{R_2\leftarrow R_2-2R_1,\ R_3\leftarrow R_3-R_1}{\rightarrow}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&1&1&2\\0&2&3&5\\0&1&2&3\end{pmatrix}\underset{R_5\leftarrow R_5-R_1}{\overset{R_3\leftarrow R_3-R_2,\ R_4\leftarrow R_4-2R_2}{\rightarrow}}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\underset{R_5\leftarrow R_5-R_1}{\overset{R_3\leftarrow R_3-R_2,\ R_4\leftarrow R_4-2R_2}{\rightarrow}}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\overset{R_5\leftarrow R_5-R_4}{\rightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

רואים כי הוקטור השלישי והוקטור החמישי ת״ל באחרים לכן ניתן להשמיט אותם מהקבוצה ונקבל שהקבוצה נפרשת על ידי שלושה וקטורים בת״ל הוקטורים 1,2,4 :

ולכן הבסיס למרחב הנפרש הוא הווקטורים : $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ ולכן המימד : $\dim=3$.

ב. נבצע את אותן הפעולות ונקבל :

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&-1&-1&-1\\2&2&0&0&-1\\1&1&5&5&2\\1&-1&-1&-1&0\end{pmatrix}\underset{R_4\leftarrow R_4-R_1,\ R_5\leftarrow R_5-R_1}{\overset{R_2\leftarrow R_2-R_1,\ R_3\leftarrow R_3-2R_1}{\rightarrow}}\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&4&4&2\\0&-2&-2&-2&0\end{pmatrix}\overset{R_3\leftarrow R_3-R_2,\ R_4\leftarrow R_4+2R_2}{\rightarrow}$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-2&-2&-2&0\end{pmatrix}$$

רואים כי הוקטורים 3,4 תלויים לינארית ושאר הוקטורים אינם ת״ל (כי אם נחליף שורות נגיע לצורה מדורגת) לכן נוכל לזרוק את וקטורים 3,4 מהקבוצה ונשאר עם אותו מרחב נפרש ע״י שלושת הוקטורים 1,2,5

ולכן הבסיס הוא : $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

והמימד הוא : $\dim=3$. **שימו לב ! חייבים לקחת את השורות המקוריות ולא אחרי הדרוג !!!!**

3. מצאו בסיס ומימד עבור הקבוצות הבאות

א. $V_1=\left\{A_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}\,\middle|\,A=A^T\right\}$.

ב. $V_2=\left\{A_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}\,\middle|\,A=-A^T\right\}$.

פתרון

יש למצוא בסיס ומרחב עבור הקבוצות הבאות :

א. $V_1=\left\{A_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}\middle|A=A^T\right\}$. כל מטריצה סימטרית נראית כך : $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

במטריצה סימטרית במידות $n\times n$ יש צורך ב- n מטריצות אלמנטריות עבור האלכסון הראשי ועוד : $\frac{n^2-n}{2}$ מטריצות אלמנטריות עבור הפרישה של חצי מאיברי המטריצה. (יש n^2 איברים, כאשר נוריד את n האיברים שבאלכסון הראשי נקבל

כי יש n^2-n איברים ומכיוון שהמטריצה סימטרית אנו צריכים רק את אחד הצדדים של האלכסון ולכן נחלק ב-2).

ממילא כי בסיס לקבוצה זו מכיל $\frac{n^2-n}{2}+n=\frac{n^2-n+2n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ מטריצות אלמנטריות.

המימד של קבוצה זו הוא : $\dim=n^2-\frac{n^2+n}{2}=\frac{n^2-n}{2}$.

ב. $V_2=\left\{A_{n\times n}\in\mathbb{R}^{n\times n}\middle|A=-A^T\right\}$. כאן המקרה הוא טיפה יותר מסובך היות ו $A=-A^T$ ז"א שכל מטריצה צריכה לקיים את השוויון הבא : $-A=\begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & & \cdots & -a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}=A^T$ מה שאומר שכל איברי האלכסון

חייבים להיות =0. .... לכן כל מטריצה שנמצאת שם תראה כך : $\begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{1n} & & & 0 \end{pmatrix}$

קבוצת המטריצות האנטי-סימטריות מתנהגות באופן זהה לעניין הבסיס והמימד כמו מקודם ולכן כרגע אין צורך ב מטריצות

עבור האלכסון הראשי אלא רק עבור הצדדים, כלומר $\frac{n^2-n}{2}$ מטריצות אלמנטריות עבור הפרישה של חצי מאיבריה.

ולכן הבסיס יראה כך : $\left\{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},\cdots\cdots\right\}$

4. יהי V מרחב וקטורי, הוכיחו כי $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס למרחב V $\Leftrightarrow$ $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס גם בסיס למרחב V.

<u>**פיתרון**</u>

יש להוכיח כי : $\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס $\Leftrightarrow$ $\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\}$ בסיס.

<u>נוכיח בכיוון אחד :</u>

נתון כי: $\left\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ בסיס ז"א שכל הווקטורים הם בת"ל ולכן המשוואה: $\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3+.....+\alpha_n v_n=0$ נכונה רק עבור: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=.....=\alpha_n=0$.

כעת נניח בשלילה כי הקבוצה: $\left\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ תלויה ליניארית, דהיינו קיים צירוף לא טריוויאלי המקיים את: $\beta_1\left(v_1+v_2\right)+\beta_2\left(v_1-v_2\right)+\beta_3 v_3+.....+\beta_n v_n=0$.

לאחר סידור נקבל: $v_1\left(\beta_1+\beta_2\right)+v_2\left(\beta_1-\beta_2\right)+\beta_3 v_3+.....+\beta_n v_n=0$ ומכיוון שנתון כי הווקטורים $\left\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ הם בת"ל הרי שקיים רק הפתרון טריוויאלי והוא: $\beta_1+\beta_2=\beta_1-\beta_2=\beta_3=...=\beta_n=0$ ולכן בפרט: $\beta_1=\beta_2=0$.

לכן גם הקבוצה $\left\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ היא בת"ל.

מכיוון שהקבוצה $\left\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ נתונה כבסיס הרי שהיא מכילה את כמות הווקטורים המינימלית הפורשת את המרחב. כלומר היא מכילה את אותו מס ווקטורים כמו המימד של המרחב.

כעת גם בקבוצה $\left\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ קיים אותו מספר הווקטורים ולכן ניתן לומר שגם היא בסיס לאותו המרחב. לפי משפט השלישי חינם.

<u>נוכיח בכיוון שני:</u>

נתון כי: $\left\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ בסיס ז"א שכל הווקטורים הם בת"ל.

לכן המשוואה: $\alpha_1\left(v_1+v_2\right)+\alpha_2\left(v_1-v_2\right)+\alpha_3 v_3+.....+\alpha_n v_n=0$ נכונה רק עבור: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=.....=\alpha_n=0$.

כעת נניח בשלילה כי הקבוצה: $\left\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ תלויה ליניארית, דהיינו קיים צירוף לא טריוויאלי המקיים:

$\beta_1 v_1+\beta_2 v_2+\beta_3 v_3+.....+\beta_n v_n=0$.

לאחר סידור של הנתון נקבל: $v_1\left(\alpha_1+\alpha_2\right)+v_2\left(\alpha_1-\alpha_2\right)+\alpha_3 v_3+.....+\alpha_n v_n=0$.

מכיוון שהווקטורים $\left\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ הם בת"ל הרי שקיים רק הפתרון טריוויאלי:

$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=...=\alpha_n=0$.

כעת מתקבל ממש: $\alpha_i=\beta_i \quad \left(1\le i\le n\right)$ ולכן גם הקבוצה $\left\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ היא בת"ל.

מכיוון שהקבוצה $\left\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ נתונה כבסיס הרי שהיא מכילה את כמות הווקטורים המינימלית הפורשת את המרחב.

כעת גם בקבוצה $\left\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ קיים אותו מספר הווקטורים ולכן ניתן לומר שגם היא בסיס לאותו המרחב.

כמסקנה סופית נוכל לומר כי: $\left\{v_1+v_2,v_1-v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ בסיס $\Leftrightarrow$ $\left\{v_1,v_2,v_3,.....,v_n\right\}$ בסיס.

5. מצאו בסיס למרחב הפתרונות של המערכת: $\begin{cases}x+y+z-w=0\\x+2y-3z=0\end{cases}$

<u>**פתרון**</u>

יש למצוא בסיס למרחב הפתרונות של המערכת הבאה: $\begin{cases}x+y+z-w=0\\x+2y-3z=0\end{cases}$.

נכתוב מטריצה ונסדר לצורה קנונית: $\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&0\\1&2&-3&0&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_1}\left[\begin{array}{cccc|c}1&1&1&-1&0\\0&1&-4&1&0\end{array}\right]\xrightarrow{R_1-R_2}\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&5&-2&0\\0&1&-4&1&0\end{array}\right]$.

ישנן שתי עמודות ציר ולכן יש שני משתנים תלויים ושני חופשיים.

נסמן: $z=t\ ,\ w=k$ ונקבל: $\begin{cases}x+5t-2k=0\\y-4t+k=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2k-5t\\y=4t-k\end{cases}$.

מציב ונקבל: $\left\{t\begin{bmatrix}-5\\4\\1\\0\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}=\begin{Bmatrix}2k-5t\\4t-k\\t\\k\end{Bmatrix}$. כלומר הבסיס הוא הוקטורים: $\left\{\begin{bmatrix}-5\\4\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$.

6. א. הוכיחו את המשפט הבא:
יהיו שני תתי מרחב W ו- U ויהא ווקטור b המקיים את שתי המערכות אזי: $b\in W\bigcap U$.
מהנתונים נאמר כי: $b\in spanW$ וכן: $b\in spanU$.

ב. מצאו את מערכת המשוואות המגדירה את החיתוך של: $W_2=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $W_1=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

__פתרון__

א. נוכיח את המשפט הבא: יהיו שני תתי מרחב W ו- U ויהא ווקטור b המקיים את שתי המערכות אזי: $b\in W\bigcap U$.
מהנתונים נאמר כי: $b\in spanW$ וכן: $b\in spanU$.
בתרגיל הקודם (תרגיל מספר 6) הוכחנו כי מתקיים השוויון עבור שני **__תתי מרחב__**: $spanW\bigcap spanU=span\left(W\bigcap U\right)$.
__(שימו לב: שוויון זה אינו נכון עבור קבוצות אלא רק עבור מרחבים וקטורים !!!!)__
כעת נוכל לומר בפשטות על סמך שני הנתונים כי וודאי שמתקיים: $b\in span\left(W\bigcap U\right)$ ולכן הווקטור b מקיים את החיתוך של מערכות המשוואות וממילא: $b\in W\bigcap U$.
מש"ל.

ב. יש למצוא את מערכת המשוואות שמגדירה את החיתוך של: $W_2=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$, $W_1=sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

נבצע: $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&2&2&b\\1&1&1&c\\0&1&2&d\end{array}\right]\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&2&2&b\\0&1&0&c-a\\0&-1&0&d-b\end{array}\right]\xrightarrow[R_4+R_3]{R_2-2R_3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&a\\0&0&2&b-2c+2a\\0&1&0&c-a\\0&0&0&d-b+c-a\end{array}\right]$.

כלומר על מנת שלמערכת יהיה פיתרון צריך להתקיים ש: $d-b+c-a=0\Leftrightarrow c=b+a-d$,

כלומר ווקטור שנמצא ב W_1 נראה כך: $\begin{pmatrix}a\\b\\b+a-d\\d\end{pmatrix}$

ככל עבור W_2 נבצע: $\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&e\\1&1&0&f\\0&1&1&g\\0&0&1&h\end{array}\right]\xrightarrow{R_2-R_1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&e\\0&1&0&f-e\\0&1&1&c\\0&0&1&d\end{array}\right]\xrightarrow{R_3-R_4}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&e\\0&1&0&f-e\\0&1&0&g-h\\0&0&1&h\end{array}\right]$ ולכן: :
$g-h=f-e\Leftrightarrow g=f-e+h$.

ולכן וקטור שנמצא ב W_2 נראה כך : $\begin{pmatrix} e \\ f \\ f-e+h \\ h \end{pmatrix}$.

ווקטור שנמצא בחיתוך, צריך לקיים את התנאים של שני תתי המרחב כלומר : $\begin{pmatrix} e \\ f \\ f-e+h \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b+a-d \\ d \end{pmatrix}$.

מהשוויון נקבל : $\left.\begin{matrix} a=e, \\ b=f, \\ d=h, \\ b+a-d=f-e+h \end{matrix}\right\} \Rightarrow b+a-d=b-a+d$

ולכן נקבל ש : $2a=2d$ כלומר $a=d$. ולכן נציב ונקבל : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix}$ כלומר : $\left\{ a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

הבסיס הוא: $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

שימו לב שהשתמשתי בכל אחד מתתי המרחב באותיות אחרות כי אחרת היות ואני עלולה להתבלבל בכל אחד מתתי המרחב האות היא שונה – לא מייצגת את אותו דבר ולכן חשוב להשתמש באותיות שונות !!!