

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל-100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 2^{\frac{1}{n}}} \quad \text{ג.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{ב.} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^7(1+7x)(1-\cos(3x))}{\sin^4(5x)(e^x-1)^5} \quad \text{א.}$$

2. קבעו אם הטורים הבאים מתכנסים בהחלט/בתנאי/מתבדרים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3} \quad \text{ג.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{(n^2)}}{n!} \quad \text{ב.} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n^2 \sqrt{e} - 1) \quad \text{א.}$$

3. תהי סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n - 1}$, ונתון כי $a_1 \geq 1$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

ב. נתון בנוסף כי הסדרה a_n מתכנסת לגבול סופי. מצאו את a_1 .

4.

א. הוכיחו/הפריכו: אם $f''(x) < 0$ לכל $x \in (0,1)$ אז לא ייתכן כי $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \infty$.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם $f''(x) < 0$ לכל $x \in (1, \infty)$ אז לא ייתכן כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

5.

א. תהי פונקציה f רציפה בקטע $(0, \infty)$ בעלת גבולות סופיים בקצות הקטע, כלומר

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \in \mathbb{R}.$$

הוכיחו כי f חסומה בקטע $(0, \infty)$.

ב. הוכיחו/הפריכו: הפונקציה $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sin(x)}{x}$ חסומה בקטע $(0, \infty)$.