אלגברה לינארית 2.

<u>תרגיל 1 : העתקות לינאריות.</u> הגשה בתוך שבועיים בתירגול, לידי המתרגל בלבד.

כל המרחבים הווקטורים בתרגיל הם ממימד סופי.

<u>שאלה 1:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית המקיימת $T^2 = -I$ באשר $I: V \to V$ העתקת הזהות, ו- $T^2 = T \circ T$.

א. הוכיחו שלכל $0 \neq v \in V$, v ו- $T(v)$ בת"ל.

ב. נניח ש $dimV = 2$. מיצאו בסיס B עבור V כך ש $[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

<u>שאלה 2:</u>

יהיו V ו- W מרחבים וקטורים מעל שדה F. תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית. יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V כך שלכל v_i מתקיים ש $T(v_i) \neq 0$. הוכיחו או הפריכו : $Ker(T) = 0$.

<u>שאלה 3:</u>

יהיו V ו- W מרחבים וקטורים מעל שדה F. נסמן ב $Hom(V, W) = \{T: V \to W :$ לינארית $T\}$ אוסף ההעתקות הלינאריות מ- V אל W. עבור $S, T \in Hom(V, W)$ ו- $\alpha \in F$ נגדיר את ההעתקות $T + S$ ו- $\alpha \cdot T$ באופן הבא: $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ ו- $(\alpha \cdot T)(v) = \alpha\, T(v)$. שימו לב שבמשוואה השמאלית, באגף הימני יש כפל סקלרי במרחב הווקטורי W המגדיר כפל של סקלר בהעתקה (שבאגף השמאלי). הוכיחו כי $+$,$\cdot$ שהוגדרו לעיל הן פעולות מוגדרות היטב על $Hom(V, W)$ (דהיינו שאכן הם מגדירות העתקות לינאריות) ושביחס לפעולות אלו $Hom(V, W)$ הוא מרחב וקטורי מעל F.

<u>שאלה 4:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית. יהי $W \subseteq V$ תת מרחב של V. אומרים ש W הוא תת-מרחב אינווריאנטי ביחס ל- T, או בקיצור, תת-מרחב T- אינוואריאנטי אם לכל $w \in W$ מתקיים ש $T(w) \in W$. דהיינו $T(W) \subseteq W$.

יהי $f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in F[t]$ פולינום מעל השדה F. ותהי $T: V \to V$ העתקה לינארית באשר V מרחב וקטורי מעל שדה F.

נגדיר את ההצבה של T ב- $f(t)$ ליהיות $f(T) = a_n T^n + \dots + a_1 T + a_0 I$ באשר $I: V \to V$ העתקת הזהות, ו- $T^k = T \circ T \circ \dots \circ T$ (הרכבה של T k פעמים).

א. הוכיחו ש לכל $f(t) \in F[t]$, $f(T): V \to V$ היא העתקה לינארית.

ב. יהי $f(t) \in F[t]$ פולינום. ויהי $W = Ker(f(T))$. הוכיחו כי W תת-מרחב T- אינוואריאנטי.

<u>שאלה 5:</u>

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. תהי $T, S: V \to V$ העתקות לינאריות. יהי $W \subseteq V$ תת T- אינוואריאנטי. הוכיחו כי:

א. אם W גם תת מרחב S- אינוואריאנטי, אזי W תת- מרחב $T \circ S$ - אינוואריאנטי.

ב. אם T הפיכה אזי W תת- מרחב T^{-1} – אינוואריאנטי.

ג.