מבוא להסתברות וסטטיסטיקה - הרצאה 2

<u>תורת ההסתברות</u> מתחילה בהערכת סיכויים של פרמה ופסקל (אמצע המאה ה-17) לגבי משחקי קוביה וקלפים.
גאוס ומשפחת ברנולי (תרמו לאחר מכן)

ההסתברות עוסקת בניסויים בהם אנו מכירים את כל התוצאות האפשריות, אך לא יודעים איזו מן התוצאות תתרחש בפועל.
כך גם ההגדרה לניסוי הסתברותי / <u>ניסוי מקרי</u>.
דוגמא: הטלת קוביה.
יודעים מהן התוצאות האפ' $\{1,\dots,6\}$
אך לא מה יתרחש בפועל.

<u>מרחב המדגם</u>

אוסף כל התוצאות האפשריות בניסוי מקרי נקרא מרחב המדגם ומסומן ב-Ω.
<u>בדוגמא:</u> קוביה $\Omega=\{1,\dots,6\}$
בסביבון $\Omega=\{$נ, ג, ה, פ$\}$

במקרה בו מס' התוצאות במרחב הוא סופי מדובר במרחב הסתברות בדיד. (לפעמים רציף (המשך))
- תוצאות אפשריות בד"כ מסומנות ב- $w_1,\dots,w_n$ תלוי בגודל Ω. ($w_i\in\Omega$ איברים במרחב)

מאורע

הגדרה: קבוצה של תוצאות מתוך Ω נקרא מאורע.

נסמן ב- A מאורע. $A \subseteq \Omega$.

דוגמא: בזריקת קוביה, $A = \{$קבלת מספר זוגי$\}$

$A = \{2, 4, 6\}$

ניסוח: A התרחש / קרה

הגדרה: המאורע המשלים. בהינתן מאורע A,
המאורע המשלים של מאורע A הוא המאורע המכיל
את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם, אך אינן
מופיעות במאורע A. נסמן: $\bar{A}$

(לפעמים A^c - Complement)

בדוגמא: $A =$ קבלת מס' זוגי בקוביה אזי $\bar{A} = \{1, 3, 5\}$

תיאור מרחב המדגם בדיאגרמת ון (Venn)

$\bar{A} = \Omega \setminus A$

מאורע ריק - מאורע בלתי אפשרי, מסומן ע"י $\emptyset$.

דוגמא: בקוביה ← קבלת 7

מאורע ודאי - מאורע החייב להתרחש, מסומן כ- Ω

דוגמא: בקוביה $\{1, \dots, 6\}$

הסתברות

הגדרה: מרחב הסתברות מורכב משלושה יסודות:

(1) קבוצה Ω של תוצאות אפשריות (מרחב המדגם)

(2) אוסף תתי-קבוצות להן ניתן הסתברות (מאורעות)

(3) פונקציית הסתברות (מספר המעיד באיזו מידה צפוי להתרחש מאורע)

מסומנת כ- P

$$P(\underset{\text{מאורע}}{A}) \in [0,1]$$

במילים אחרות $0 \le P(A) \le 1$

יש להדגיש לתלמידים כי ההסתברות תמיד בין 0 ל-1.

אקסיומות פונ' ההסתברות

1. $P(\emptyset)=0$ (הסתברות למאורע ריק), $P(\Omega)=1$

2. אם $A_1, A_2, \dots$ מאורעות זרים אזי

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i)$$

תכונות הנובעות מהאקסיומות

א. אם $A \subset B$ אזי $P(A) \le P(B)$

הוכחה: $B = A \cup (B \setminus A)$

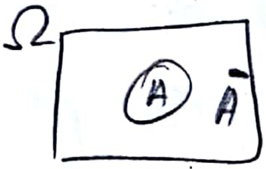
$$P(B) = P(A \cup (B\setminus A)) \underset{\text{זרים}}{=} P(A) + \underbrace{P(B\setminus A)}_{\ge 0} \ge P(A)$$

ב. המקרה המאורע המשלים

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

הוכחה:

$$\Omega = A \cup \bar{A}$$



$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) \underset{\text{זרים}}{=} P(A) + P(\bar{A})$$

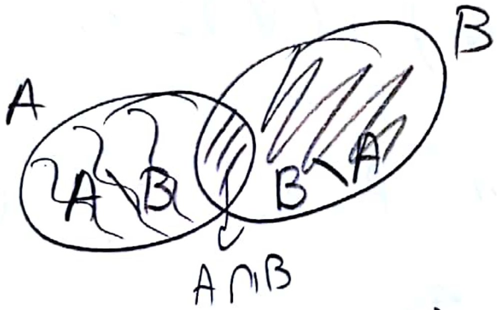
ג. אם A, B מאורעות זרים זה לזה, אזי ($A \cup B$ איחוד מאורעות A או B)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$ (אקסיומה 2)

ד. אם A, B מאורעות כלליים לאו דווקא זרים אזי

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

הוכחה:



אגף שמאל $= P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$

אגף ימין $= P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \left(P(A \setminus B) + \cancel{P(A \cap B)}\right) + \left(P(B \setminus A) + \cancel{P(A \cap B)}\right) - \cancel{P(A \cap B)}$

= אגף שמאל

הערה: A, B זרים $\iff P(A \cap B) = 0$! פ⊆ל.

(3)

ה. צריך A, B, C

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-\big(P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(A\cap C)\big)+P(A\cap B\cap C)$$

ניסוי הסתברותי אחיד

<u>הגדרה:</u> ניסוי מקרי בו כל התוצאות שוות הסתברות נקרא ניסוי מקרי אחיד.

במקרה זה נקבל את ההגדרה הקלאסית (הומוגני) של הסתברות:

$$P(\text{מאורע})=\frac{\text{מספר התוצאות האפשריות של המאורע}}{\text{סך התוצאות האפשריות במרחב המדגם}}$$

ז"א אם A מאורע במרחב הסתברות אחיד Ω אזי

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$$

<u>הוכחה:</u> נסמן $|A|=m$, $|\Omega|=n$.

כל התוצאות הסתברות שווה, נסמנה ב- x.

$$P(\Omega)=\underbrace{x+x+\dots+x}_{n\text{ מחוברים}}=\underbrace{nx=1}_{\Downarrow}=P(\Omega)$$

$$x=\frac{1}{n}$$

במאורע A יש m תוצאות עם הסתברות $\frac{1}{n}$ לכל אחת ולכן

$$P(A)=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots+\frac{1}{n}}_{m\text{ מחוברים}}=\frac{m}{n}$$

∎

<u>דוגמא:</u> בהטלת קוביה הוגנת, כל פאה מתקבלת בהסתברות שווה, נגדיר מאורע $A=\{$קבלת 2$\}$

$B=\{$קבלת מס' זוגי$\}$ $C=\{$קבלת מס' זוגי גדול מ 3$\}$

חשב הסתברות עבור A, B, C.

<u>פתרון:</u> $|\Omega|=6$

$$P(A)=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, \quad P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

<u>דוגמא:</u>

בכד יש 3 כדורים אדומים, 2 כחולים ו-5 לבנים. מוציאים באקראי כדור אחד מהכד.

א. מהי ההסתברות שהכדור שהוצא כחול?

ב. " " " לא יהיה אדום?

<u>פתרון:</u>

3 אדומים
2 כחולים
5 לבנים

<u>א.</u>

$$P(\text{כדור כחול})=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

ב.

$$P(\text{לא אדום})=1-P(\text{אדום})$$

$$=1-\frac{3}{10}=\boxed{\frac{7}{10}}$$

בדרך אחרת:

$$P(\text{לא אדום})=P(\text{לבן או כחול})\overset{\text{א"ז}}{=}P(\text{לבן})+P(\text{כחול})$$

$$=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\boxed{\frac{7}{10}}$$

מרחב מדגם של ניסוי עם 2 שלבים

דוגמא: זורקים 2 קוביות.
מרחב המדגם יהיה

קוביה ראשונה \ קוביה שניה	1	2	3	4	5	6
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

מרחב המדגם מכיל 36 תוצאות אפשריות

- מהי ההסתברות שנקבל בסכום 5?

$$P(\text{סכום } 5) = \frac{4}{36} = \boxed{\frac{1}{9}}$$

- מהי ההסתברות שנקבל בדיוק בקוביה אחת 3?

$$P(\text{בדיוק } 3) = \frac{10}{36} = \boxed{\frac{5}{18}}$$

- הסתברות שבכל אחת מהקוביות נקבל מספר קטן מ-4?

$$P(\text{קטן מ-}4) = \frac{9}{36} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

- הסתברות למכפלת תוצאות < מ 36?

$$P = \boxed{\frac{35}{36}}$$

טבלה דו-מימדית

בהינתן מרחב מדגם Ω ומאורעות A ו B

ניעזר בטבלה הדו-מימדית הבאה:

	A	$\bar{A}$	
B	$P(A\cap B)$	$P(\bar{A}\cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A\cap \bar{B})$	$P(\bar{A}\cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$
$$P(B)+P(\bar{B})=1$$

מאורע והמשלים שלו

שורה 1: $P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B)$

שורה 2: $P(\bar{A}\cap \bar{B})+P(A\cap \bar{B})=P(\bar{B})$

עמודה 1: $P(A\cap B)+P(A\cap \bar{B})=P(A)$

עמודה 2: $P(\bar{A}\cap B)+P(\bar{A}\cap \bar{B})=P(\bar{A})$

הסבר לדוגמא ל עמודה 1:

A - אוהב שוקולד

$\bar{A}$ לא אוהב שוקולד

B - אוהב גלידה

$\bar{B}$ - לא אוהב גלידה

$$P(\text{אוהב שוקולד} \cap \text{אוהב גלידה})+P(\text{אוהב שוקולד} \cap \text{לא אוהב גלידה})=P(\text{אוהב שוקולד})$$