22.10.21

פתרון מועד ב' – אינפי 1 למדעי המחשב – 89-132

מרצה: דר' ארז שיינר הוראות: משקל כל שאלה 22 נק' משך המבחן: שלוש שעות חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x^2)}{\ln(cos(x))}$ ב. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{e^{2x}+e^x}-e^x$ ג. $\lim \sqrt[n^2]{\ln(n)}$

2. קבעו לכל אחד מן הטורים הבאים אם הוא מתכנס בהחלט, בתנאי או מתבדר:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)n^2}{n!}$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{(-1)^n}{n^3}\right)$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n n}{n^2}$

3. תהי סדרה חיובית $a_n>0$ המקיימת לכל $n\in\mathbb{N}$ כי $a_n^2<a_n-a_{n+1}$

א. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת לגבול סופי

$$a_{n+1}-a_n<-a_n^2\leq 0$$

לכן הסדרה מונוטונית יורדת.

מהנתון אפס הוא חסם מלרע, ולכן הסדרה מונוטונית יורדת וחסומה ולכן מתכנסת לגבול סופי.

ב. הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n<\frac{1}{n}$, וחשבו את גבול הסדרה a_n

ראשית קל לחשב את הגבול, שהרי

$$0<a_n<\frac{1}{n}$$

ולכן לפי משפט הכריך $a_n\to 0$.

רק נותר להוכיח כי אכן $a_n<\frac{1}{n}$.

(שימו לב, גם אם לא הוכחנו כי $a_n<\frac{1}{n}$ נקבל חלק מהניקוד על שאר התשובה הנכונה).

נוכיח באינדוקציה. הפעם אפילו המקרה הראשון אינו טריוויאלי כי לא נתון a_1

צ"ל כי $a_1<\frac{1}{1}$ ונתון כי

$$a_1^2 < a_1 - a_2$$

$$a_1^2 - a_1 < -a_2$$

כמו כן, נתון כי $a_n > 0$ לכל n ולכן $a_2 > 0$ ולכן

$$a_1^2 - a_1 < 0$$

$$a_1(a_1 - 1) < 0$$

זו פרבולה צוחקת עם השורשים 0,1 ולכן

$$0 < a_1 < 1$$

אכן $a_1 < 1$.

יהי n עבורו $a_n < \frac{1}{n}$ צ"ל כי $a_{n+1} < \frac{1}{n+1}$

ידוע כי

$$a_{n+1} < a_n - a_n^2 = a_n(1 - a_n)$$

שימו לב: אסור להגיד כי לפי הנחת האינדוקציה

$$a_n(1 - a_n) < \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

שהרי אמנם הקטנתי את a_n אבל <u>הגדלתי</u> את $1 - a_n$

מספיק להוכיח כי

$$a_n(1 - a_n) \leq \frac{1}{n+1}$$

נחקור את הפרבולה

$$f(x) = x - x^2$$

המקסימום שלה (שהרי היא בוכה) הוא בקודקוד $-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

בפרט עבור $n=2$

$$a_2 < a_1 - a_1^2 \leq \frac{1}{2}$$

עבור $n \geq 2$

לפי הנחת האינדוקציה $a_n < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$

ולכן אנחנו בתחום עלייה של הפרבולה

$$a_n < \frac{1}{n}$$

$$f(a_n) < f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$a_n - a_n^2 < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2} \leq \frac{1}{n+1}$$

$$(n+1)(n-1) \overset{?}{\leq} n^2$$

$$n^2 - 1 \leq n^2$$

וזה אכן נכון משל.

4. תהי פונקציה f רציפה בקטע $[0,1]$, כך ש $f(1) > 1$.

א. הוכיחו או הפריכו: אם $f(0) < 1$ אזי קיימת נקודה $c \in [0,1]$ בה $f(c) = c$.

הפרכה:

$$f(x) = x + \frac{1}{2}$$

ראשית, אכן, $f(1) = \frac{3}{2} > 1$ וכן $f(0) = \frac{1}{2} < 1$.

הפונקציה רציפה כצירוף אלמנטריות.

תהי $c \in [0,1]$ נוכיח כי $f(c) \neq c$ ואכן

$$f(c) = c + \frac{1}{2} > c$$

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $f(0) < 0$ אזי קיימת נקודה $c \in [0,1]$ בה $f(c) = c$.

הוכחה:

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - x$$

צ"ל כי קיימת c עבורה $h(c) = 0$

$$h(0) = f(0) - 0 < 0$$

$$h(1) = f(1) - 1 > 0$$

h רציפה כצירוף רציפות, ולכן לפי משפט ערך הביניים אכן קיימת $c \in [0,1]$ עבורה $h(c) = 0$. משל.

5. תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ הגזירה בכל הממשיים כך שלכל $x \in \mathbb{Q}$ מתקיים $f(x) < x$.

א. הוכיחו או הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) < x$

ספוילר: אנחנו מתחילים בנסיון להוכיח, שמסתיים בהפרכה.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - x$$

וצ"ל שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $h(x) < 0$

אנחנו יודעים מהנתון כי לכל $x \in \mathbb{Q}$ מתקיים כי $h(x) < 0$

כיוון שf גזירה היא רציפה, ולכן גם h כצירוף רציפות.

יהי $x \in \mathbb{R}$ ונבחר a_n סדרה כך ש

$$x \neq a_n \to x$$

$$a_n \in \mathbb{Q}$$

אפשר לבנות סדרה כזו כי בין כל שני ממשיים יש אינסוף רציונאליים ואינסוף אי רציונאליים.

$$h(a_n) \to h(x)$$

מצד שני כיוון ש $a_n \in \mathbb{Q}$

$$h(a_n) < 0$$

$$h(x) = h(a_n) \leq 0$$

אבל מי אמר כי $h(x) \neq 0$?

אף אחד, וזה לא נכון.

$$f(x) = x - \left(x - \sqrt{2}\right)^2$$

לכל $x \neq \sqrt{2}$

$$f(x) < x$$

אבל עבור $x = \sqrt{2}$

$$f(x) = x$$

(והפונקציה אכן גזירה לכל x כצירוף אלמנטריות גזירות).

לסיכום הוכחנו כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f(x) \leq x$ אבל לא $f(x) < x$.

ב. הוכיחו או הפריכו: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים כי $f'(x) < 1$

הפרכה:

במזל גדול (אבל גם הגיון בריא) אותה ההפרכה מסעיף א' עובדת

$$f'(x) = 1 - 2\left(x - \sqrt{2}\right)$$

עבור $x = \sqrt{2}$ מתקיים כי

$$f'\left(\sqrt{2}\right) = 1$$