מבחן לדוגמא

① ⓐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)\ln(\cos x)}{x^2 \cdot 2^x} = \underset{\downarrow 1}{\dfrac{\cos(x)}{2^x}} \cdot \dfrac{\ln(\cos x)}{x^2} \xrightarrow{\text{L'H}} \dfrac{-\frac{\sin(x)}{\cos x}}{2x} = -\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{2\cos(x)} = -\dfrac{1}{2}$

ⓑ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{\sqrt{2x^2+2}-(x+1)} = \dfrac{|x-1|}{\sqrt{2x^2+2}-(x+1)} \cdot \overbrace{\sqrt{2x^2+2}+(x+1)}^{4}$

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{(x-1)^2} \to x\to 1^+ \quad \dfrac{x-1}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{x-1} \to \infty$ $\qquad x-1>0 \quad \cancel{x>0}$ $\quad x>1$

$x\to 1^- \quad \dfrac{-(x-1)}{(x-1)^2} = -\dfrac{1}{x-1} \to \infty$ $\qquad \cancel{x-1<0} \quad x-1<0 \quad x<1$

ⓒ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{n^n}{n!}\right) = \ln\left(\lim \sqrt[n]{\dfrac{n^n}{n!}}\right)$ $\qquad a_n = \dfrac{n^n}{n!}$

מבחן ל הסעיפים

$\dfrac{(n+1)^n \cdot \cancel{(n+1)}}{\cancel{n!}\cdot\cancel{(n+1)}} \cdot \dfrac{\cancel{n!}}{n^n} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\ln(e) = 1$

② ⓐ $\displaystyle\int_1^\infty \dfrac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$1 = A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x+1)$

$x=-1 \quad A=1$

$x=0 \quad 1+C=1 \quad C=0$

$x=1 \quad 3+2B=1 \quad B=-1$

$\displaystyle\int \frac{1}{x+1}dx = \ln|x+1|$

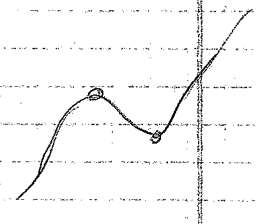
$\displaystyle -\int\frac{x}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+x+1}dx = -\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{x^2+x+1} = -\frac{1}{2}\ln|x^2+x+1| + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+x+1}$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt3}+\frac{2}{\sqrt3}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt3}\arctan\left(\frac{2x}{\sqrt3}+\frac{1}{\sqrt3}\right)$

$$G(x) = \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{artang}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} G(t) - G(1)$$

$$G(x) = \underbrace{\ln\left(\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\right)}_{\substack{\lim \to 1 \\ 0}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$



$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} - \ln\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\sqrt{3})$$

(2) $f(x) = \sqrt{\sin(x^4)}$ — לחשב את $f'(0)$

השורש בעייתי רק אם יש ביטוי שמתאפס כי הנגזרת $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

אם יש לה בעיה לפי נוסחה ⇐ לך להגדרת הנגזרת

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{\sin(x^4)}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{\sin(x^4)}{x^4}\cdot x^2}}{x} = 0$$

(3) (ב) מצאו את הערך המקסימלי

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$$

		-1		1	
f'	$-$		$+$		$-$
	↘	min	↗	max	↘

נחפש נקודות קיצון והתנהגות באינסוף

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$$

$$f(1) = 1$$

3) ג) לכל $x>0$ $\quad 0<c<x \quad 0<\ln(1+x^2)\le x$

לגרנז' $\ln(1+x^2)$ $[0,x]$

לפי סעיף א $\quad \dfrac{\ln(1+x^2)-\ln(1+0^2)}{x-0} = \dfrac{2c}{1+c^2} \le 1$ $\quad 0<$

בגלל ש $x>0$ אפשר לכפול

$$0 < \frac{\ln(1+x^2)}{x} \le 1$$

$$\ln(1+x^2) \le x$$

4) ב) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{x}_{\infty}\Big(\underbrace{\tfrac{f(x)}{x}}_{0}-1\Big) = -\infty$

ג) להוכיח שקיים c $\quad f(c)=c$ $\quad$ אם ייתכן אז ערך הביניים

צריך להוכיח ש h מתאפס $\quad h(x)=f(x)-x$

לכן קיים x_1 בו h שלילי $\quad \lim\limits_{x\to\infty} h(x) = -\infty$

$f(0)$ נתון חיובי $\quad h(0)=f(0)>0$

ולכן לפי ערך הביניים h מתאפס

2) א) להוכיח ש $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ $\quad a_n$ חיובית אלה $\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=3$

נניח בשלילה ש $a_n \to L$ כיון ש a_n חיובית $L>0$

לפי הנתון $\quad \dfrac{2L}{L}=3 \quad \underset{\text{סתירה}}{2=3}$

(אם L שווה אפס $\quad \dfrac{0}{0}=?$ $\quad a_n$ כי (לא ערלה)

דוגמא נגדית לסדרה ש a_n חיובית אלה $\quad a_n=x^n$

$$\frac{x^n+x^{n+2}}{x^{n+1}} \to 3$$

עד לצי פה ולכן הסדרה קבועה $\quad \dfrac{1+x^2}{x}=3 \to$ n מצמצמים

$$x^2-3x+1=0$$

$x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt5}{2} \qquad x_1<1 \xrightarrow{\text{ערך}} a_n=0$

$x_2>1$

ב

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$$

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} \to \frac{1}{L} + L = 3 \qquad L = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2}$$

אם $L<1$ $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ הרי משלב מסוים ולכן a_n יורדת סתירה

$L > 1$

ב 6 סכום רימן של $\ln(1+x)$ בקטע $[0,1]$

לרשום חלוקה $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$

$$a_n = \frac{1}{n}\ln(1+\tfrac{1}{n}) + \dots + \frac{1}{n}\ln(1+\tfrac{n}{n})$$

$$a_n \to \int_0^1 \ln(1+x)\,dx = (1+x)\ln(1+x) - (1+x)\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 2 + 1$$

ב

$$f(x) = e^x \qquad a = 0 \qquad x = -\frac{1}{2}$$

$$\left(e<3 \quad 1<c<2 \quad e^c < 3^c \right)$$

$-\frac{1}{2} < c < 0$ המקסימלי $c=0$

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!\,2^{n+1}} \right| \le \frac{1}{(n+1)!\,2^{n+1}}$$