לינארית 2 תשפ"ג סמסטר ב מועד ב

מרצים: ד"ר עדי בן צבי, אריאל ויצמן.
מתרגלים: אריאל ויצמן, נעה כהן, כנה נהיר, אלעד עטייא, גלעד פורת קורן, ניר שרייבר.
יש לענות על **כל** שאלות הבחינה. ניתן להגיע עד 104 נק'. אין חומר עזר.
זמן הבחינה: 3 שעות.
המלצה חמה: התחילו עם השאלות בהן אתם מרגישים בטוחים יותר. יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה.
יש לכתוב את כל התשובות על טופס הבחינה. יש להוכיח ולנמק בכל אחת מן השאלות.

1. (15 נק') יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי B בסיס סדור לV. הוכיחו: λ הוא ע"ע של T אם ורק אם λ הוא ע"ע של $[T]_B^B$.

2. נתבונן ב $\mathbb{R}^4$ עם מ"פ סטנדרטית. נגדיר $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ לפי משפט ההגדרה:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\1\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(א) (6 נק') מצאו בסיס או"נ B ומטריצה אלכסונית $D \in \mathbb{R}^{4\times4}$ כך ש $[T]_B^B = D$.

(ב) (7 נק') מצאו את הוקטור ב$\ker T$ הכי קרוב ל $v = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (8 נק' לסעיף):

(א) אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, ומטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $P_A(B) = 0$ אז גם B לכסינה.

(ב) לכל מטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{2\times2}$ המטריצה $C = AB - BA$ מקיימת: אם C לא נילפוטנטית אז היא לכסינה.

(ג) אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $(A-3I)(A+2I) = 0$, אז קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $Av = 3v$.

(ד) תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים: אם v וקטור עצמי של A אז v וקטור עצמי של A^{-1}.

4. (10 נק') תהא $A \in \mathbb{R}^{9\times9}$ המקיימת: $A^3 = 0$ ובנוסף $\operatorname{rank}\left(A^2\right) = 2$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

5. הגדרה: מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תיקרא סימטרית חיובית אם A סימטרית ובנוסף מתקיים: אם λ ע"ע של A אז $\lambda > 0$.

(א) (8 נק') הוכיחו שלכל מטריצה הפיכה $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים: המטריצה M^tM סימטרית חיובית.

(ב) (9 נק') תהא $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שקיימת מטריצה הפיכה $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $B = M^tM$.

(ג) (7 נק') תהא $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שלכל מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים: P^tBP סימטרית חיובית.

(ד) (10 נק') תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שקיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $P^tAP = I$.

(ה) <u>בונוס</u> 4 נק' (מעבר ל104 נק' של שאר המבחן): תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות סימטריות חיובית, ותהי $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $P^tAP = I$. הוכיחו:

$$\det(A + B) \geq \det(A) + \det(B)$$

הדרכה: הוכיחו תחילה שמתקיים

$$\det\left(I + P^tBP\right) \geq \det\left(I\right) + \det\left(P^tBP\right)$$

בהצלחה!!

שאלה 1: (15 נק') יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $T : V \to V$ אופרטור לינארי, ויהי B בסיס סדור ל-V. הוכיחו: λ הוא ע"ע של T אם ורק אם λ הוא ע"ע של $[T]_B^B$.

<u>פתרון שאלה 1:</u>

המשך פתרון שאלה 1

<u>שאלה 2:</u> נתבונן ב $\mathbb{R}^4$ עם מ"פ סטנדרטית. נגדיר $T:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ לפי משפט ההגדרה:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\3\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\\1\end{pmatrix}=T\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

א. (6 נק') מצאו בסיס או"נ B ומטריצה אלכסונית $D\in\mathbb{R}^{4\times4}$ כך ש $[T]_B^B=D$.

ב. (7 נק') מצאו את הוקטור ב$\ker T$ הכי קרוב ל $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

<u>פתרון שאלה 2:</u>

המשך פתרון שאלה 2

<u>שאלה 3:</u> הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות (8 נק' לסעיף):

א. אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ לכסינה, ומטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $P_A(B) = 0$ אז גם B לכסינה.

ב. לכל מטריצות $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ המטריצה $C = AB - BA$ מקיימת: אם C לא נילפוטנטית אז היא לכסינה.

ג. אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מקיימת $(A-3I)(A+2I) = 0$, אז קיים $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש $Av = 3v$.

ד. תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה. לכל $v \in \mathbb{F}^n$ מתקיים: אם v וקטור עצמי של A אז v וקטור עצמי של A^{-1}.

<u>פתרון שאלה 3:</u>

המשך פתרון שאלה 3

המשך פתרון שאלה 3

שאלה 4: (10 נק') תהא $A \in \mathbb{R}^{9\times 9}$ המקיימת: $A^3 = 0$ ובנוסף $\operatorname{rank}\left(A^2\right) = 2$. מצאו את כל צורות ז'ורדן האפשריות של A.

פתרון שאלה 4:

המשך פתרון שאלה 4

המשך פתרון שאלה 4

שאלה 5: הגדרה: מטריצה $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ תיקרא <u>סימטרית חיובית</u> אם A סימטרית ובנוסף מתקיים: אם λ ע"ע של A אז $\lambda > 0$.

א. (8 נק') הוכיחו שלכל מטריצה הפיכה $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים: המטריצה $M^t M$ סימטרית חיובית.

ב. (9 נק') תהא $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שקיימת מטריצה הפיכה $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $B = M^t M$.

ג. (7 נק') תהא $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שלכל מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מתקיים: $P^t B P$ סימטרית חיובית.

ד. (10 נק') תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה סימטרית חיובית. הוכיחו שקיימת מטריצה הפיכה $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $P^t A P = I$.

ה. **<u>בונוס</u>** 4 נק' (מעבר ל104 נק' של שאר המבחן): תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצות סימטריות חיובית, ותהי $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $P^t A P = I$. הוכיחו:

$$\det(A+B) \geq \det(A) + \det(B)$$

הדרכה: הוכיחו תחילה שמתקיים

$$\det\left(I + P^t B P\right) \geq \det\left(I\right) + \det\left(P^t B P\right)$$

<u>פתרון שאלה 5</u>:

המשך פתרון שאלה 5

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___

המשך פתרון שאלה ___