

הצעת פתרון – אלגברה לינארית 1 סמסטר קיץ תשפ"ו מועד א

עדי מכנס

1. (9 נקודות לסעיף) נגדיר שתי מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

א. מצאו בסיס ל $N(A) \cap N(B)$.

פתרון:

בסיס ל $N(A)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנה x_3 הוא חופשי ולכן אפשר להציב בו פרמטר t . כעת:

$$N(A) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

בסיס ל $N(B)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המשתנים x_2, x_3 חופשיים ולכן אפשר להציב בהם פרמטרים t, s בהתאמה:

$$N(B) = \left\{ \begin{pmatrix} 2t - s \\ t \\ s \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

אפשר לראות ש

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ולכן $N(A) \subseteq N(B)$ (פורמלית: יהי $v \in N(A)$, לכן $v = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אבל $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N(B)$ ולכן בגלל שמרחב האפס הוא תמ"ו גם

כפל בסקלר משאיר אותו ב $N(B)$. לבסוף, $N(A) \cap N(B) = N(A)$ וסה"כ בסיס לחיתוך הוא:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ב. מצאו מטריצה $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ שונה ממטריצת האפס כך ש $AC = 0, BC = 0$.

פתרון:

תחילה צריך להבין מה המטריצה C צריכה לקיים. נסמן את העמודות של C ב $C_1(C), C_2(C), C_3(C)$. לכן מכפל מטריצות לפי עמודות:

$$\forall 1 \leq i \leq 3: C_i(AC) = AC_i(C) = \vec{0}, \quad C_i(BC) = BC_i(C) = \vec{0}$$

ולכן כל עמודה שלה שייכת למרחב האפס של A וגם של B . כזכור, בסעיף א' קיבלנו את הבסיס לחיתוך המרחבים הללו, ולכן המטריצה:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

תקיים את המבוקש.

ג. תהא מטריצה $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ שונה ממטריצת האפס כך ש $AC = 0, BC = 0$.

מצאו את כל האפשרויות ל $\text{rank}(C)$.

פתרון:

כזכור בסעיף ב', ראינו שהעמודות של C צריכות להיות וקטורים מהחיתוך של מרחבי האפס של A, B . כיוון ש $C \neq 0$, יש לפחות עמודה אחת שאינה וקטור האפס.

מצד שני, כל עמודה שכזאת צירוף לינארי של $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, דהיינו כפל בסקלר שלו. לכן הדרגה, שהיא ממד מרחב העמודות יהיה 1, שכן כל העמודות צ"ל בסה"כ של $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. (9 נקודות לסעיף) התבוננו במרחב $\mathbb{R}^3$. נתונים הוקטורים:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ a+1 \\ a^3 - 3a^2 + 3a \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} a^3 + 1 \\ a^2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

כאשר a פרמטר ממשי.

א. קבעו לכל ערך של a האם קיימת העתקה לינארית יחידה או קיימות אינסוף העתקות לינאריות או אין העתקות לינאריות בכלל המקיימות: $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ כך ש:

$$Tu_1 = v_1, Tu_2 = v_2, Tu_3 = v_3$$

פתרון:

תחילה נבדוק לאלו ערכי a הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 0 & 1 & a^3 - 3a^2 + 3a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a^3 - 3a^2 + 3a \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & a^3 - 3a^2 + 2a \end{pmatrix}$$

נבדוק מתי:

$$a^3 - 3a^2 + 2a = 0$$

$$a(a^2 - 3a + 2) = 0$$

$$a(a-1)(a-2) = 0$$

לכן עבור $a \neq 0,1,2$ קיימת העתקה לינארית יחידה, ממשפט ההגדרה.

עבור כל ערך אחר, אנחנו נחפש את הצ"ל של הוקטור השלישי ע"י שני הראשונים, ונבדוק אם וקטורי הטווח מקיימים את אותו הציור הלינארי.

אם כן, זה אומר שהוקטור השלישי מיותר. אפשר להשלים את $\{u_1, u_2\}$ לבסיס ל $\mathbb{R}^3$ ולבחור וקטור טווח שרירותי ובסה"כ יהיו אינסוף העתקות לינאריות.

אם לא, זו תהיה סתירה ללינאריות של T ולכן לא תהיה העתקה לינארית שתקיים את המבוקש.

את הדירוגים נמשיך מהיכן שעצרנו.

עבור $a = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ואז:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

אכן מתקיים, ולכן יהיו אינסוף העתקות לינאריות שכאלו.

עבור $a = 1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ואז:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לא, ולכן אין העתקה לינארית שתקיים את המבוקש.

עבור $a = 2$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ואז:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

לא, ולכן אין העתקה לינארית שתקיים את המבוקש.

סה"כ:

- עבור $a \notin \{0,1,2\}$ קיימת העתקה לינארית יחידה המקיימת את הנתונים.

- עבור $a = 0$ ישנן אינסוף העתקות לינאריות המקיימות את הנתונים.

- עבור $a \in \{1,2\}$ אין אף העתקה לינארית המקיימת את הנתונים.

ב. קבעו לכל ערך של a האם קיימת העתקה לינארית יחידה או קיימות אינסוף העתקות לינאריות או אין העתקות לינאריות בכלל המקיימות:

$$T: \text{span}\{u_1, u_2, u_3\} \rightarrow \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$$

כך שהיא פונקציה על.

פתרון:

אם $\text{span}\{u_1, u_2, u_3\} \neq \{0\}$, ובמידה שיש לנו העתקה לינארית על, אז גם αT על [כאשר $\alpha \neq 0$] (הוכחה: יהי u בטווח, צריך למצוא v בתחום כך ש

$$\alpha T v = u$$

נעביר אגף ונקבל ש

$$T v = \frac{1}{\alpha} u$$

ובגלל ש T על אז יש מקור ל $\frac{1}{\alpha} u$. ברור שאף פעם כל הוקטורים u_1, u_2, u_3 מתאפסים, ולכן או שיש אינסוף העתקות לינאריות על, או שאין בכלל.

כזכור, תנאי הכרחי לכך שהעתקה לינארית

$$T: V \rightarrow W$$

היא על הינו:

$$\dim W \leq \dim V$$

ולכן אם התנאי הזה לא מתקיים נדע בוודאות שאין העתקה לינארית על. מנגד, אם התנאי הזה מתקיים אפשר ליצור העתקה לינארית על ידי משפט ההגדרה: אם $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ וכן $C = \{v_1, \dots, v_m\}$ בסיסים ל V, W בהתאמה (כזכור $n \geq m$) אזי נגדיר:

$$\forall 1 \leq i \leq m: T v_i = u_i$$

$$\forall m < i \leq n: T v_i = u_1$$

ואז על פי משפט מההרצאה:

$$\text{Im} T = \text{span}\{T v_1, \dots, T v_n\} = \text{span}\{u_1, \dots, u_m\} = W$$

ואכן T על.

סה"כ, אנחנו נבדוק עבור אילו ערכי a מתקיים כי $\dim \text{span}\{u_1, u_2, u_3\} \geq \dim \text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$. עבור ערכי a עבורם אי השוויון מתקיים תהיינה אינסוף העתקות, ובעבור ערכי a שלא מקיימים את אי השוויון לא תהיה אף העתקה על. למעשה כבר מצאנו בסעיף א' כי:

- עבור $a \notin \{0, 1, 2\}$ מתקיים $\dim \text{span}\{u_1, u_2, u_3\} = 3$ ומכיוון שבכל מקרה $\dim \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} \leq 3$ (כי זהו תת מרחב של $\mathbb{R}^3$) יש אינסוף העתקות.

- עבור $a \in \{0, 1, 2\}$ מתקיים כי $\dim \text{span}\{u_1, u_2, u_3\} = 2$. נצמצם לבסיס אם כך את הטווח לכל ערך של a .

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a^3 + 1 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a^3 + 1 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & -4 & -2a^3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & a^3 + 1 \\ 0 & 1 & a^2 \\ 0 & 0 & 4a^2 - 2a^3 \end{pmatrix}$$

קעת הביטוי

$$4a^2 - 2a^3 = 0$$

$$2a^2(2-a) = 0$$

לכן אם $a = 0 \vee a = 2$ מתקיים כי $\dim \text{span}\{v_1, v_2, v_3\} = 2$ ויש אינסוף העתקות. אם $a = 1$ אזי ממד הטווח גדול יותר ממד התחום ולכן אין אף העתקה.

סה"כ:

- עבור $a \neq 1$ יש אינסוף העתקות לינאריות שמקיימות את המבוקש.

- עבור $a = 1$ אין אף העתקה לינארית אחת שמקיימת את המבוקש.

3. (9 נקודות לסעיף) ענו על הבאים:

א. תהא

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

מצאו מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ המקיימת כי $\det(BAB^t) = \det(A) + \det(B)$.

פתרון:

תחילה נשאל עצמנו מה אמורה להיות הדטרמיננטה של B . נסמן: $x = \det B$. כעת:

$$\det(BAB^t) = \det(B) \cdot \det(A) \cdot \det(B^t) = x^2 \det(A)$$

כעת:

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{R_2 - R_1}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{R_3 + R_1}{=} \det \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

זוהי דטרמיננטה של מטריצה משולשית עליונה:

$$= (-1) \cdot (-1) \cdot 2 = 2$$

ולכן אנחנו מקבלים משוואה על x :

$$2x^2 = 2 + x$$

$$2x^2 - x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

נישאר עם הפתרון החיובי, למרות שזה לא באמת כזה משנה. לבסוף, נבחר מטריצה שהדטרמיננטה שלה היא בדיוק זאת. לכן נבחר:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 42 & 67 \\ 0 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & \frac{1 \pm \sqrt{17}}{4} \end{pmatrix}$$

ב. נתון k טבעי. יהיו v_1, v_2, v_3, v_4 וקטורים ב $\mathbb{F}^k$ שהם בת"ל. נגדיר

$$\begin{aligned}w_1 &= v_1 + v_2 - v_4 \\w_2 &= v_1 + v_2 + v_3 \\w_3 &= v_2 + v_3 + v_4 \\w_4 &= v_1 + v_2\end{aligned}$$

מצאו בסיס ל $\text{span}\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$.

פתרון:

עלינו לצמצם את $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ לבסיס. שימו לב שלא נתון מהו השדה ולכן צריך להיזהר בפעולות הדירוג. כדי לעשות זאת, אפשר לעבור לוקטורי הקואורדינטות לפי $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ובעצם לבדוק תלות לינארית שלהם. נתחיל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1, R_4 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כלומר הם בת"ל וגם פורשים, ולכן סיימנו.

ג. תהייה $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$. הוכיחו או הפריכו: אם $A^t B$ הפיכה אז $B^t A$ הפיכה.

פתרון:

נוכיח את הטענה. נבחין כי:

$$(A^t B)^t = B^t (A^t)^t = B^t A$$

אבל $A^t B$ הפיכה ולכן גם $(A^t B)^t = B^t A$ הפיכה. משל ■.

4. (9 נקודות לסעיף) תהא $T: V \rightarrow V$ ה"ל. הוכיחו או הפריכו:

א. אם קיים בסיס סדור B של V כך ש $[T]_B^B$ מטריצה סקלרית

אז לכל בסיס סדור C של V מתקיים ש $[T]_C^C$ מטריצה סקלרית.

פתרון:

נוכיח את הטענה. יהי C בסיס ל V . כזכור:

$$[T]_C^C = [I]_C^B [T]_B^B [I]_B^C$$

כעת $[T]_B^B = \alpha I$, כאשר $\alpha \in \mathbb{F}$ כלשהו. לכן:

$$[T]_C^C = [I]_C^B (\alpha I) [I]_B^C$$

$$\alpha [I]_C^B [I]_B^C$$

אבל כזכור $([I]_B^B)^{-1} = [I]_B^C$ ולכן:

$$= \alpha I$$

ולכן גם $[T]_C^C$ סקלרית. משל ■.

ב. אם קיים בסיס סדור B של V כך ש $[T]_B^B$ מטריצה אלכסונית

אז לכל בסיס סדור C של V מתקיים ש $[T]_C^C$ מטריצה אלכסונית.

פתרון:

נפריך את הטענה. נגדיר:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

על ידי משפט ההגדרה:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

כמובן, בבסיס הסטנדרטי $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ מתקיים:

$$[T]_B^B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אבל בבסיס:

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(הוכחה זריזה שזהו אכן בסיס: נדרג

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ומהשלישי חינם סיימנו). כעת:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = T \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

וכעת נחשב את:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_C : \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1.5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 + R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & -1.5 \end{array} \right)$$

כלומר:

$$\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right]_C = \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1.5 \end{pmatrix}$$

כלומר:

$$[T]_C^C = \begin{pmatrix} 0.5 & * \\ -1.5 & * \end{pmatrix}$$

וזו אינה מטריצה אלכסונית.

העשרה:

באלגברה ליניארית 2 תראו שמציאת בסיס שגורם למטריצה המייצגת להיות אלכסונית זו בעיה חשובה ולא טריוואלית – קוראים לזה לכסון.

5. יהיו V, W מ"ו מעל אותו שדה. נסמן $B = \{v_1, \dots, v_n\}, C = \{w_1, \dots, w_m\}$ בסיסים ל V, W בהתאמה.

לכל $1 \leq i \leq n$ ולכל $1 \leq j \leq m$ נגדיר העתקה $T_{i,j}: V \rightarrow W$ בעזרת משפט ההגדרה כך:

$$T_{i,j}(v_i) = w_j$$

ולכל $k \neq i$ נגדיר $T_{i,j}(v_k) = 0$. עוד נסמן $\text{Hom}(V, W)$ את מרחב ההעתקות מ V ל W .

א. (6 נקודות) הוכיחו כי הקבוצה $\{T_{i,j} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ היא בסיס ל $\text{Hom}(V, W)$.

פתרון:

בת"ל: יהי צירוף לינארי מתאפס

$$T = \alpha_{1,1}T_{1,1} + \dots + \alpha_{n,m}T_{n,m} = 0$$

(שימו לב, זוהי העתקת האפס). נציב v_i ונקבל:

$$Tv_i = \alpha_{i,1}w_1 + \dots + \alpha_{i,m}w_m = 0$$

אבל $w_1, \dots, w_m$ בסיס ולכן בת"ל, ומכאן $\alpha_{i,1} = \dots = \alpha_{i,m} = 0$. כך אפשר לעשות לכל i ונקבל כי לכל i, j ש $\alpha_{i,j} = 0$.

פרישה: יהי $T: V \rightarrow W$. נמצא סקלרים $\alpha_{1,1}, \dots, \alpha_{1,m}, \dots, \alpha_{n,1}, \dots, \alpha_{n,m}$ כך ש $T = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j}T_{i,j}$. נסמן:

$$Tv_i = c_1w_1 + \dots + c_mw_m$$

ונגדיר:

$$\alpha_{i,1} = c_1, \dots, \alpha_{i,m} = c_m$$

כלומר, עבור כל i , בוחרים את הסקלרים $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,m}$ להיות הסקלרים מהקואורדינטה של Tv_i לפי C .

מספיק להוכיח (ממשפט ההגדרה) שיש שוויון בהצבות של הבסיסים. דהיינו, אם $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל V , וגם לכל i מתקיים כי $Tv_i = Sv_i$, אז $T = S$. לכן, יהי $1 \leq i \leq n$: כעת:

$$c_1w_1 + \dots + c_mw_m = Tv_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j}T_{i,j}v_i$$

לכל $k \neq i$, מתקיים כי $T_{k,j} = 0$ ולכן אנחנו נשארים עם:

$$= \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j}T_{i,j}v_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j}v_j$$

אבל השוויון הזה נכון על פי איך שהגדרנו. משל ■.

ב. (5 נקודות) נניח כי $V = W$. תהא $S: V \rightarrow V$ ה"ל ויהא $\{R_1, \dots, R_N\}$ בסיס של $\text{Hom}(V, V)$.

הוכיחו כי:

i . $\{SR_1, \dots, SR_N\}$ בסיס של $\text{Hom}(V, V)$ אמם S הפיכה.

פתרון:

נוכיח את שני הצדדים.

בכיוון $\Rightarrow$ נתון כי S הפיכה ולכן צריך להוכיח שהקבוצה לעיל בסיס. מספיק להוכיח ש $\{SR_1, \dots, SR_N\}$ בת"ל, ומהשלישי חינם נסיים. יהי צ"ל מתאפס:

$$\alpha_1 SR_1 + \dots + \alpha_N SR_N = 0$$

כעת מלינאריות:

$$S(\alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_N R_N) = 0$$

אבל S הפיכה ולכן היא חח"ע, מה שאומר ש $Sw = 0$ אם ורק אם $w = 0$. לכן

$$\alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_N R_N = 0$$

(שימו לב, מדובר בהעתקת האפס, כי תמיד הקלט שקול לאפס) אבל כמובן $\{R_1, \dots, R_N\}$ בסיס, ולכן $\alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0$.

בכיוון $\Leftarrow$ נתון שהקבוצה לעיל בסיס וצ"ל ש S הפיכה. כיוון ש $\{SR_1, \dots, SR_N\}$ בסיס, קיימים סקלרים כך ש:

$$\alpha_1 SR_1 + \dots + \alpha_N SR_N = I$$

ולכן:

$$S(\alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_N R_N) = I$$

טענת עזר: יהי V מונ"ס ויהיו $S, T: V \rightarrow V$ כך ש $ST = I$. אזי S, T הפיכות ומתקיים ש $T^{-1} = S$.

הוכחת טענת עזר: יהי C בסיס כלשהו ל V . לכן:

$$[ST]_C^C = [S]_C^C \cdot [T]_C^C = [I]_C^C = I$$

אבל $[S]_C^C, [T]_C^C$ ריבועיות ולכן הפיכות, ולכן אפשר להכפיל בשני הצדדים ב $([T]_C^C)^{-1}$:

$$[S]_C^C = ([T]_C^C)^{-1} = [T^{-1}]_C^C$$

ולכן $S = T^{-1}$ וברור כי S, T הפיכות גם כן. על כן, מתקיים כי S הפיכה וסיימנו. ■

ii. $\{R_1 S, \dots, R_N S\}$ בסיס של $\text{Hom}(V, V)$ אממ S הפיכה.

פתרון:

נוכיח את שני הצדדים.

בכיוון $\Rightarrow$ נתון כי S הפיכה ולכן צריך להוכיח שהקבוצה לעיל בסיס. מספיק להוכיח ש $\{SR_1, \dots, SR_N\}$ בת"ל, ומהשלישי חינם נסיים. יהי צ"ל מתאפס:

$$\alpha_1 R_1 S + \dots + \alpha_N R_N S = 0$$

כעת מלינאריות:

$$(\alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_N R_N)S = 0$$

אבל S הפיכה ולכן נרכיב את שני האגפים ב S^{-1} מצד ימין ונקבל:

$$\alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_N R_N = 0$$

אבל $\{R_1, \dots, R_N\}$ בסיס ולכן בת"ל ועל כן $\alpha_1 = \dots = \alpha_N = 0$.

בכיוון $\Leftarrow$ נתון כי $\{R_1 S, \dots, R_N S\}$ בסיס וצריך להוכיח ש S הפיכה. כיוון ש $R_1 S, \dots, R_N S$ בסיס, קיימים סקלרים כך ש:

$$I = \alpha_1 R_1 S + \dots + \alpha_N R_N S$$

ולכן:

$$I = (\alpha_1 R_1 + \dots + \alpha_N R)S$$

מטענת העזר שבתת הסעיף הקודם, נובע כי S הפיכה וסיימנו. משל ■.