01.09.22

84-172 מתמטיקה ב' לכימאים – דר' ארז שיינר – פתרון מועד ב' – תשפ"ב

משך המבחן: שלוש שעות הוראות: יש לפתור את כל השאלות, משקל כל שאלה 28 נק', כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

<u>שאלה 1</u> נביט במערכת המשוואות הבאה עם הנעלמים x,y,z,w והפרמטר a, בשדה המספרים הממשיים.

$$\begin{cases} ax+ay+z+w=1 \\ -ax-y+(a^2-2)z-w=0 \\ (1-a)y-8z+aw=-1 \end{cases}$$

א. מצאו לכל ערכי הפרמטר a אם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות כלל.

$$\begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 & | & 1 \\ -a & -1 & a^2-2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1-a & -8 & a & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+R_1}$$

$$\to \begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1-a & -8 & a & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2}$$

$$\to \begin{pmatrix} a & a & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & a-1 & a^2-1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & a^2-9 & a & | & 0 \end{pmatrix}$$

אם האיברים $a, a-1, a^2-9$ כולם שונים מאפס, המטריצה מדורגת, ללא שורת סתירה, יש משתנה חופשי ולכן יש אינסוף פתרונות.

עד כה עבור $a\neq 0,1,\pm 3$ יש אינסוף פתרונות.

עבור ערכים אלה, נציבם אחד אחד ונראה.

נציב $a=0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

קיבלנו מטריצה <u>לא מדורגת</u> נמשיך לדרג אותה.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+9R_2}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & | & 9 \end{pmatrix}$$

המטריצה מדורגת, בלי שורת סתירה, המשתנה הראשון חופשי, ולכן יש אינסוף פתרונות.

נציב $a = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

יש שורת סתירה, ולכן אין פתרון (אפילו שהמטריצה אינה מדורגת).

נציב $a = \pm 3$ (כי הצבתי בראש וראיתי שזה ממש דומה)

$$\begin{pmatrix} \pm 3 & \pm 3 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & \pm 3 - 1 & 8 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm 3 & | & 0 \end{pmatrix}$$

המטריצה מדורגת, אין שורת סתירה, המשתנה השלישי חופשי ולכן יש אינסוף פתרונות.

סה"כ אין פתרון עבור $a = 1$ ויש אינסוף פתרונות לכל $a \neq 1$

ב. מצאו את קבוצת הפתרונות למערכת עבור $a = 2$.

הערה: אם במבחן גיליתם בסעיף קודם שעבור הערך המבוקש אין פתרון. אל תסמכו על עצמכם, תציבו את הערך הזה ותדרגו מחדש בלי הפרמטר, כך יקטן הסיכוי לשגיאת חישוב, ואולי אפילו תצילו את סעיף א', במקום לשרוף את שניהם.

למרות אזהרה זו, אני סומך על הדירוג שלי, וממילא כבר קיבלתי את התואר.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

על מנת למצוא את הפתרון הכללי נדרג קנונית

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{5}R_3]{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2-3R_3]{R_1-\frac{1}{2}R_3}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{7}{10} & | & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5} & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & | & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{5} & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & | & 0 \end{pmatrix}$$

דירגנו קנונית, נציב פרמטר במשתנה החופשי $w = t$ ונקבל

$$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t$$

$$y = 1 - \frac{6}{5}t$$

$$z = \frac{2}{5}t$$

סה"כ הפתרון הכללי הוא

$$\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t,1-\frac{6}{5}t,\frac{2}{5}t,t\right)=\left(-\frac{1}{2},1,0,0\right)+t\left(\frac{1}{2},-\frac{6}{5},\frac{2}{5},1\right)$$

ג. מצאו את קבוצת הפתרונות למערכת עבור $a=0$.

נמשיך את הדירוג אליו הגענו אחרי שהצבנו $a=0$ ונדרג קנונית על מנת למצוא את הפתרונות

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & -1 & 0 & | & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & 9 & | & 9\end{pmatrix}\xrightarrow[\frac{1}{9}R_3]{-R_1}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & | & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_3}$$

$$\to\begin{pmatrix}0 & 1 & 1 & 0 & | & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & | & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 1\end{pmatrix}$$

נציב פרמטר במשתנה החופשי $x=t$ ונקבל

$$y=-1$$

$$z=0$$

$$w=1$$

סה"כ הפתרון הכללי הוא

$$(t,-1,0,1)=(0,-1,0,1)+t(1,0,0,0)$$

<u>שאלה 2</u> תהי העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ המקיימת $T(x,y)=(x+ay,ax+y)$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ כאשר $a\in\mathbb{R}$ פרמטר.

א. חשבו את $T\big(T(1,0)\big)$.

$$T(1,0)=(1,a)$$

$$T\big(T(1,0)\big)=T(1,a)=(1+a^2,a+a)=(1+a^2,2a)$$

ב. חשבו את המטריצה המייצגת $[T]$.

נפעיל את הפונקציה על הבסיס הסטנדרטי $(1,0),(0,1)$ ונשים בעמודות.

$$T(1,0)=(1,a)$$

$$T(0,1)=(a,1)$$

ולכן

$$[T]=\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}$$

ג. קבעו עבור אילו ערכי a המטריצה $[T]$ הפיכה.

אפשר לדרג את המטריצה המייצגת ואפשר להשתמש בדטרמיננטה.

$$\det([T]) = \det\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1 - a^2$$

מטריצה הפיכה כאשר הדטרמיננטה שונה מאפס, כלומר $a \neq \pm 1$.

ד. מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה המייצגת $[T]$.

הע"ע הם השורשים של הפולינום האופייני

$$\det([T] - xI) = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-x & a \\ a & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)^2 - a^2 = (1-x-a)(1-x+a) = (x-1+a)(x-1-a) =$$

$$= \big(x - (1-a)\big)\big(x - (1+a)\big)$$

לכן סה"כ הע"ע של המטריצה הם

$$\lambda_{1,2} = 1 - a, 1 + a$$

שאלה 3 אין קשר בין הסעיפים

א. מצאו את משוואת המישור המשיק לפונקציה $f(x,y) = \sin(x^2 y)$ בנקודה $(1,\pi)$.

נזכור כי משוואת המישור המשיק לגרף הפונקציה $f(x,y)$ בנקודה (x_0, y_0) היא

$$z - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0)$$

נחשב

$$f(1,\pi) = \sin(1^2 \cdot \pi) = 0$$

$$f_x(x,y) = \cos(x^2 y) \cdot 2xy$$

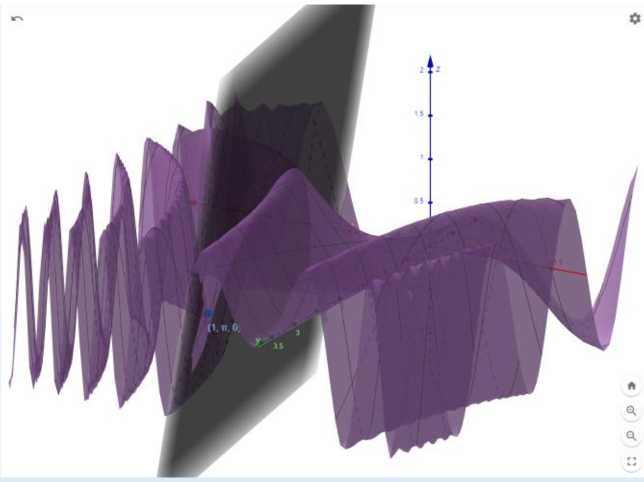
$$f_x(1,\pi) = \cos(\pi) \cdot 2\pi = -2\pi$$

$$f_y(x,y) = \cos(x^2 y) \cdot x^2$$

$$f_y(1,\pi) = \cos(\pi) = -1$$

סה"כ משוואת המישור המשיק הינה

$$z - 0 = -2\pi(x-1) - (y - \pi)$$



שרטוט למען הרתעה.

ב. מצאו את כל הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $z^3 + i = cis(\pi)$.

למדנו איך למצוא את כל השורשים של משוואה מהצורה

$$z^n = \text{מרוכב}$$

וזו אכן הצורה שיש לנו כאן

$$z^3 = \underbrace{cis(\pi) - i}_{\text{מספר מרוכב}}$$

אבל בנוסחא מצד ימין צריך להופיע המספר בצורתו הגאומטרית (קוטבית).

נטפל בצד ימין

$$cis\,(\pi) - i = \cos(\pi) + i\sin(\pi) - i = -1 - i$$

כעת נעבור לצורה גאומטרית

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

כיוון שהחלק הממשי שלילי אזי

$$\theta = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) + \pi = \frac{\pi}{4} + \pi$$

סה"כ המשוואה שקולה למשוואה הבאה:

$$z^3 = \sqrt{2}cis\,\left(\frac{5}{4}\pi\right)$$

ולכן שלושת פתרונות המשוואה הם

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{2}}cis\left(\frac{\frac{5}{4}\pi + 2\pi k}{3}\right)$$

עבור $k = 0,1,2$.

שימו לב: לא צריך לעבור לצורה האלגברית (קרטזית) אלא אם התבקשנו, או שצריך לעבור.

מה הכוונה? עברנו למעלה בין הצורות על מנת להעביר את המשוואה לצורה שאנו יודעים לפתור.

ג. מצאו את כל הפתרונות $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $z - \overline{z} = z \cdot \overline{z}$.

דעו לכם: הרבה פעמים העניין במרוכבים הוא לבחור את ההצגה המתאימה ביותר לתרגיל – גאומטרית או אלגברית (גם בבגרות). כיוון שאין לנו דרך לדעת מראש מה טוב, צריך לשלוט בשתי הדרכים ולנסות את שתיהן הרבה פעמים.

בואו ננסה קודם את הדרך הלא נוחה, שבמקרה זה הוא הגאומטרית.

$$z = r\ cis(t)$$

$$\overline{z} = r\ cis(-t)$$

$$z \cdot \overline{z} = r^2$$

סה"כ הדרישה היא ש

$$r\ cis(t) - r\ cis(-t) = r^2$$

אם $r = 0$ זה פתרון, ולכן $z = 0$ הוא פתרון אחרת אפשר לחלק בו

$$cis\ (t) - cis(-t) = r$$

נעבור כעת לצורה האלגברית, אני לא רואה דרך אחרת

$$\cos(t) + i\sin(t) - (\cos(-t) + i\sin(-t)) = r$$

$$\cos(t) + i\sin(t) - (\cos(t) - i\sin(t)) = r$$

$$\cos(t) + i\sin(t) - \cos(t) + i\sin(t) = r$$

$$2i\sin(t) = r$$

השיוויון בין מדומה טהור לממשי טהור הוא רק אם שניהם שווים אפס, הרי החלקים הממשיים צריכים להיות שווים וכך גם המדומים

$$r = 0$$

$$2\sin(t) = 0$$

בעוד הדבר השני אפשר, ב$r = 0$ כבר טיפלנו.

סה"כ הפתרון היחיד למשוואה הוא $z = 0$.

כעת נפתור שנית בדרך האלגברית.

$$z = a + bi$$

$$\overline{z} = a - bi$$

נציב במשוואה

$$z - \bar{z} = z \cdot \bar{z}$$

ונקבל

$$a + bi - (a - bi) = a^2 + b^2$$

$$2bi = a^2 + b^2$$

ושוב (מהר בהרבה) נשווה את החלקים הממשיים והמדומים

$$a^2 + b^2 = 0$$

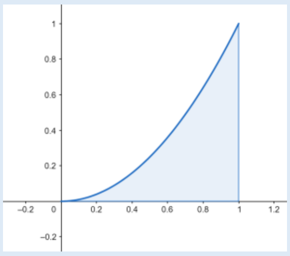
$$2b = 0$$

ולכן $a = b = 0$ ולכן $z = 0$ הוא הפתרון היחיד.

<u>שאלה 4</u> בכל אחד מן הסעיפים חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_D f(x,y)dxdy$

א. כאשר $f(x,y) = x + y$ והתחום הוא $D = \{(x,y)|0 \le x \le 1, 0 \le y \le x^2\}$.

ראשית נצייר את התחום D על אף שזה לא בהכרח נחוץ.



כעת נחשב את האינטגרל (דיי נתעלם מהציור הזה בתכלס)

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} (x+y)dy \right) dx$$

נחשב את האינטגרל הפנימי:

$$\int_0^{x^2} (x+y)dy = \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} = x^3 + \frac{x^4}{2} - 0$$

כעת

$$\iint_D f = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - 0$$

ב. כאשר $f(x,y) = x^2 + y^2$ והתחום הוא $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \le 1\}$.

נעבור לקואורדינטות קוטביות

$$\iint_D f = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) r d\theta \right) dr = \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} (r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)) r d\theta \right) dr =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 d\theta dr = \int_0^1 r^3 \left(\int_0^{2\pi} 1 d\theta \right) dr = 2\pi \int_0^1 r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

ג. כאשר $f(x,y) = 2xy \cdot \cos(x^2y)$ והתחום הוא $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le \pi\}$.

$$\iint_D f = ?$$

כאן תמיד יש לנו בחירה האם להחליף את סדר האינטגרציה על מנת לקבל אינטגרל פשוט יותר, או בכלל אינטגרל פתיר.

כאשר התחום מלבני, כמו פה, החלפת סדר האינטגרציה היא מיידית.

כאשר התחום אינו מלבני, כמו בסעיף א', יש עבודה על מנת להחליף את סדר האינטגרציה.

כאן, על מנת ללמוד, ובשביל היופי של המשחק, אנחנו ננסה לחשב את האינטגרל בשתי הדרכים ונראה מה יוצא.

נתחיל מהסדר

$$\int_0^1 \left(\int_0^{\pi} 2xy\cos(x^2y)\, dy \right) dx$$

ונתחיל מהאינטגרל הפנימי

$$\int_0^{\pi} 2xy\cos(x^2y) dy = \left\{ \begin{matrix} f' = \cos(x^2y) & g = 2xy \\ f = \frac{\sin(x^2y)}{x^2} & g' = 2x \end{matrix} \right\} = \left[2xy \cdot \frac{\sin(x^2y)}{x^2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \cdot \frac{\sin(x^2y)}{x^2} dy =$$

הערה שאולי תעזור:

$$\int \cos(3x)\, dx = \frac{\sin(3x)}{3}$$

נמשיך עם החישוב

$$= \frac{2\pi\sin(\pi x^2)}{x} - \frac{2}{x}\int_0^{\pi} \sin(x^2y)\, dy = \frac{2\pi\sin(\pi x^2)}{x} - \frac{2}{x}\left[-\frac{\cos(x^2y)}{x^2} \right]_0^{\pi} =$$

$$= \frac{2\pi}{x}\sin(\pi x^2) - \frac{2}{x} \cdot \left[-\frac{\cos(\pi x^2)}{x^2} + \frac{1}{x^2} \right]$$

זה פשוט לא נראה פתיר! אולי אנחנו טועים, אבל כדאי לנסות את הצד השני.

$$\int_0^{\pi} \left(\int_0^1 2xy\cos(x^2y)\, dx \right) dy$$

אזכיר שוב: אם התחום לא היה מלבני, הייתה עבודה לעשות על מנת להחליף את סדר האינטגרציה.

נתחיל מהאינטגרל הפנימי

$$\int_0^1 2xy\cos(x^2y)\,dx = \begin{Bmatrix} t = yx^2 \\ dt = 2xydx \end{Bmatrix} = \int_0^y \cos(t)\,dt = [\sin(t)]_0^y = \sin(y)$$

לגבי שינוי קצות האינטגרל

באינטגרל המקורי, המשתנה היה x והקצוות היו $x = 0$ וכן $x = 1$

נציב ערכים אלה בהצבה, ונקבל כי t נע בין $t = y \cdot 0^2$ לבין $t = y \cdot 1^2$

כעת לאינטגרל החיצוני:

$$\int_0^\pi \sin(y)\,dy = [-\cos(y)]_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

ראו את החרטוט של סבא ג'פטו, אני עוד יכול לשמור על העבודה שלי שנה נוספת

https://chatgpt.com/c/349b63b8-dc4a-4399-ad6f-3be44e99ef02