

תרגיל 2

1. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה p - אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני,

$$d_p(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \frac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases} \quad \text{ו} \quad k(x, y) = \max\{i : p^i | (x - y)\}$$

א. הוכיחו: $p^n \rightarrow 0$ במטריקה p -אדית.
 ב. עבור $z \in \mathbb{Z}$ תנו דוגמא לסדרה לא קבועה ששואפת ל z במרחב (\mathbb{Z}, d_3) .

2. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרחב מטרי (X, d) . נאמר ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף, אם יש $x \in X$ ו $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n = x \quad \forall n \geq n_0$

א. הוכיחו שבמרחב מטרי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
 ב. הוכיחו שבמרחב מטרי דיסקרטי כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.

3. במרחב l_∞ הראו שהסדרה $x_n = (\frac{n+1}{n}, \frac{n+2}{2n}, \frac{n+3}{3n}, \dots)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.

4. נתבונן במרחב (X, d) כאשר X היא קבוצת המספרים האי רציונליים, ו d היא המטריקה המושרית מ \mathbb{R} .

א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם (M, τ) הוא מרחב מטרי ו (Y, τ_Y) תת מרחב עם המטריקה המושרית, אז לכל $\{x_n\} \subseteq Y$ ו $x \in Y$, $x_n \rightarrow x$ לפי τ , אם"ם $x_n \rightarrow x$ לפי τ_Y .

ב. נסתכל על הסדרה $x_n = \frac{n + \sqrt{2}}{n - \sqrt{2}}$. הוכיחו ש $\{x_n\} \subseteq X$.
 ג. הוכיחו ש $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב X .

5. האם קיים שיכון איזומטרי בין המרחבים הבאים? הוכיחו או הפריכו.

(א) $\mathbb{Q} \cap (2016, \infty) \rightarrow \{\sqrt{3} - \frac{n}{2n+5} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (המטריקות כאן הן $d(x, y) = |x - y|$)

(ב) $(\mathbb{Z}, d_5) \rightarrow (\mathbb{Z}, d_7)$

6. יהי (X, d) מרחב מטרי.

(א) הוכיחו כי לכל $x \in X$ מתקיים כי $\{x\}$ תת קבוצה סגורה של X .

(ב) תנו דוגמה נגדית לסעיף א' אם X הוא רק מרחב פסאודו מטרי.

(ג) הוכיחו כי כל קבוצה סופית היא סגורה.

7. הוכיחו שבמרחב (\mathbb{Z}, d_p) כל כדור פתוח שמרכזו באפס $B(0, r)$ הוא קבוצה סגורה ותת חבורה.

8. יהי X המרחב המטרי של כל הסדרות מעל \mathbb{R} . המטריקה היא $d(a_n, b_n) = \frac{1}{m}$ כאשר m הוא האינדקס המינימלי שבו $a_m \neq b_m$ (כמובן אם הסדרות זהות המרחק הוא 0).

(א) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הבאה היא קבוצה פתוחה:
 $\{\vec{x} = \langle x_0, x_1, x_2, \dots \rangle \mid [\langle x_0, x_1, x_2 \rangle = \langle 0, 1, 2 \rangle] \vee [x_0 = 6]\}$

(ב) הוכיחו כי קבוצת הסדרות הקבועות היא קבוצה סגורה.

9. הוכיחו/הפריכו: אם $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה חח"ע ועל, אז (\mathbb{R}, d_f) הוא מרחב שלם, כאשר $d_f(x, y) = |f(x) - f(y)|$

10. הוכיחו/הפריכו: המרחבים הבאים שלמים:

(א) מרחב כל הסדרות הממשיות המתאפסות לבסוף, עם מטריקת הסופרימום.

(ב) \mathbb{R}^N עם המטריקה: $d((x_1, \dots, x_N), (y_1, \dots, y_N)) = \max_i |x_i - y_i|$