

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(x)) \cdot \sin(\ln(1 + \sin(x)))}{(1 - \cos(x))^2 e^{\sin(x)}}$ ב. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos(x))^x$ ג. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + n + n^2}$

2.

א. חשבו את $\int \sin(\ln(x)) dx$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^{\infty} x e^{-x} dx$, ואם כן חשבו אותו.

3. תהי f פונקציה רציפה בכל הממשיים כך ש $f(0) = 1$ ולכל x מתקיים כי $f(x) \neq x$

ג. הוכיחו כי $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

ד. נניח בנוסף כי f גזירה בכל הממשיים. הוכיחו/הפריכו: $f'(x) \geq 1$ לכל x

4. תהי f פונקציה רציפה, גזירה וחיובית בכל הממשיים, כך ש $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{x} = f'(0)$

א. הוכיחו כי $f(0) = 1$.

נתון בנוסף כי קיימת נק' $0 < x_0$ עבורה $\ln(f(x_0)) = x_0$.

ב. הוכיחו כי קיימת נקודה c עבורה $f'(c) = f(c)$

5.

א. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים $\ln(1+x) < x$

ב. נביט בסדרה a_n המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$ ותנאי ההתחלה $a_1 = 1$.

הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת ומצאו את גבולה.

6.

א. תהי f גזירה ברציפות בקטע $[0,1]$.

הוכיחו כי גבול הסדרה $a_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} f'\left(\frac{i}{n}\right) \cdot f\left(\frac{i}{n}\right)$ הינו $\frac{f^2(1) - f^2(0)}{2}$

ב. חשבו את $\sin^2(1)$ עד רמת דיוק של $h = 0.05$