תרגיל מספר 2

הגשה בתוך שבועיים לידי המתרגל בשיעור התרגול בלבד.

שאלה 1:

א. הוכיחו או הפריכו: $V = U \oplus W$ אם ורק אם $\dim U + \dim W = \dim V$.

ב. יהיו $U_1, U_2, U_3 \le V$ ת"מ המקיימים $\dim U_2 < \dim U_3$ וכן $U_1 + U_2 = U_1 + U_3$
האם $\dim(U_1 \cap U_2)$ קטן גדול או שווה ל- $\dim(U_1 \cap U_3)$.

שאלה 2:

יהיו V ו- U מרחבים וקטורים מעל שדה F. תהי $T: V \to U$ העתקה לינארית. יהי $W \le V$ תת מרחב.
נגדיר העתקה $T|_W : W \to U$ ע"י $T|_W(w) = T(w)$ לכל $w \in W$. ההעתקה $T|_W$ נקראת העתקת הצימצום של T ל- W.

א. הוכיחו כי העתקת הצימצום כפי שהוגדרה לעיל היא העתקה לינארית.
ב. בטאו את הגרעין והתמונה של $T|_W$ באמצעות $T, W, KerT$.
ג. הראו שמתקיים $dimW = \dim(KerT \cap W) + \dim(T[W])$, באשר $T[W] = \{T(w) : w \in W\}$.

שאלה 3:

רשמו את. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 7 & 5 & 4 & 1 & 10 & 9 & 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

א. כמכפלה של מחזורים זרים.
ב. כמכפלה של חלופים .
האם σ זוגית או אי זוגית?

שאלה 4:

רשמו את $(3\ 4\ 5)(2\ 3\ 4)(1\ 2\ 3)(6\ 7\ 1)(7\ 6\ 5)(4\ 5\ 6)$ כמכפלה של מחזורים זרים.

שאלה 5:

אומרים שתמורה τ היא תמורה מסדר k אם $\tau^k = \left(\underbrace{\tau \circ \tau \circ \ldots \circ \tau}_{k \text{ times}}\right) = e$ וכן $\tau^{k-1} \neq e$ באשר e היא תמורת הזהות.

א. כמה תמורות מסדר 3 יש ב S_2 ?

ב. כמה תמורות מסדר 3 יש ב S_3 ?

ג. כמה תמורות מסדר 3 יש ב S_4 ?

ד. מהו סדר התמורה בשאלה 3 ?

המשך שאלה 5:

ה. מהו הסדר של מחזור מאורך r ? הציעו דרך מהירה לחשב סדר של תמורה עפ"י פירוק התמורה למחזורים זרים.

<u>שאלה 6:</u>

הוכיחו שכל איבר ב S_n ניתן להצגה כמכפלה של חילופים מהקבוצה $\{(1\ 2),(2\ 3),\ldots,(n-1\ n)\}$.

בהצלחה.