

תרגיל 9

להגשה ב"ב טבת (25.12) או י"ד טבת (27.12) - כל אחד בקבוצת התרגול שלו.

1. יהי V מ"מ"פ (עם נורמה מושרתת). $v \in V, v \neq 0$ הוכח כי הגודל של $\frac{v}{\|v\|}$ הוא 1 (תזכורת גודל של וקטור w הוא $\|w\|$).

פתרון: הינו סקלאר ולכן יכול לצאת מהנורמה (כיוון שחיובי לא צריך להוסיף ערך מוחלט) כלומר

$$\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|v\|} v \right\| = \frac{1}{\|v\|} \|v\| = 1$$

2. יהי V מ"מ"פ. W, U תתי מרחב. הוכח: $(W + U)^\perp = W^\perp \cap U^\perp$

הוכחה בעזרת הכלה דו-כיוונית:

(\subseteq) יהא $v \in (W + U)^\perp$. לכל $w \in W, u \in U \in W + U$ מתקיים $w + u = w + 0, u = 0 + u$ ולכן v מאונך אליהם ובפרט שייך ל- $W^\perp \cap U^\perp$

(\supseteq) יהא $v \in W^\perp \cap U^\perp$ ($\langle w, v \rangle = \langle u, v \rangle = 0$). צ"ל $v \in (W + U)^\perp$ לשם כך יהיה $w + u \in W + U$ ואכן $\langle w + u, v \rangle = \langle w, v \rangle + \langle u, v \rangle = 0 + 0 = 0$ ולכן $v \in (W + U)^\perp$ ■

3. יהי V מ"מ"פ. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אורתוגונלית. הוכח: B בת"ל. (הדרכה: התבונן בצ"ל שמתאפס והפעל מכפלה פנימית על שני הצדדים עם v_j).

פתרון: יהא $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ צ"ל $\alpha_i = 0$ לכל i . נפעיל מכפלה פנימית עם v_j מסוים.

$\langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_j \rangle = \langle 0, v_j \rangle = 0$ אורתוגונלי נקבל

$0 = \langle \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, v_j \rangle = \alpha_1 \langle v_1, v_j \rangle + \dots + \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle + \dots + \alpha_n \langle v_n, v_j \rangle = \alpha_j \|v_j\|^2$

כיוון ש $v_j \neq 0$ כי $0 \notin B$ זה גורר ש $\alpha_j = 0$ מכיוון שזה נכון לכל j נקבל את הדרוש. ■

נראה שימוש להטלות:

4. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ נרצה לפתור את המערכת $Ax = b$. אם נמצא את מרחב העמודות (אין צורך) נגלה כי לא נמצא ב $C(A)$ ולכן אין פתרון למערכת הנ"ל. לכן נרצה למצוא b' כך ש $b' \in C(A)$ שהוא קרוב ל b (במובן ש $\|b - b'\|$ מינמאלי. שימו לב ש $b - b'$ מציין את הסטייה מהפתרון המבוקש).

במילים אחרות: מצאו את ההטלה של b למרחב העמודות $C(A)$ בעזרת הסעיפים הבאים:

(א) מצאו בסיס אורתוגונלי ל $C(A)$ בעזרת תהליך גרס שמידט (עמודות A בת"ל- אין צורך לבדוק זאת).

(ב) כעת קל להטיל את b ל $-C(A)$ עשו זאת.

(ג) חשבו את גודל הטעות כלומר $\|b - b'\|$

פתרון: הקדמה:

$$\text{ומכאן} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & 3 & 0 & b \\ 1 & 4 & 1 & c \\ 1 & 5 & -2 & d \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 2 & 0 & c-a \\ 0 & 3 & -3 & d-a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 2 & c+a-2b \\ 0 & 0 & 0 & d+2a-3b \end{pmatrix}$$

רואים שאכן עמודות A בת"ל ו $b \notin C(A)$.

(א) נסמן $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ כיוון שעמודות A בת"ל $\{v_1, v_2, v_3\}$ בסיס ל $C(A)$. נפעיל גרם שמידט.

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{8}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

כלומר $\{w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ בסיס אורתונורמלי ל $C(A)$.

(ב) $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ לפי מה שראינו בתרגול ההיטל שווה ל

$$\begin{aligned} b' &= \frac{\langle b, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle b, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 + \frac{\langle b, w_3 \rangle}{\|w_3\|^2} w_3 \\ \frac{\langle b, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\langle b, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 = \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\langle b, w_3 \rangle}{\|w_3\|^2} w_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ b' &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

בסה"כ ההיטל הוא

$$\|b - b'\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{4} \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{2} \quad (\text{ג})$$

5. יהא $V = \mathbb{C}_1[x] = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{C}\}$ בסיס סטנדרטי של V . בעזרת תהליך גרם שמידט מצא בסיס

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx \quad (\text{ביחס למכפלה הפנימית})$$

אורתונורמלי ל V נסמן $f_1 = 1, f_2 = x$ נשתמש בתהליך גרם שמידט

$$g_1 = f_1$$

$$g_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, g_1 \rangle}{\|g_1\|^2} g_1 = x - \frac{\int_0^1 x \cdot 1 dx}{\int_0^1 1 \cdot 1 dx} \cdot 1 = x - \frac{\frac{1}{2}}{1} = x - \frac{1}{2}$$

ננרמל את g_1, g_2 :

$$\|g_1\| = 1 \quad \text{ולכן} \quad \|g_1\|^2 = 1$$

$$\|g_2\| = \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad \text{ולכן} \quad \|g_2\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 x^2 - x + \frac{1}{4} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

לסיכום $\left\{ \frac{g_2}{\|g_2\|}, \frac{g_1}{\|g_1\|} \right\} = \left\{ 2\sqrt{3}\left(x - \frac{1}{2}\right), 1 \right\}$ בסיס אורתונורמלי ל V .

בהצלחה!