פתרון מבחן בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תשפ"א

מרצה: דר' ארז שיינר. תאריך: 17/09/20

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=

1. נגדיר את הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases} x & x>0 \\ |x+1| & -2\le x\le 0 \\ x^2 & x<-2 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(f(x))>f(x)-1$

תחום ראשון $x>0$

בתחום זה, $f(x)=x$ ולכן גם $f(f(x))=f(x)=x$

אי השיוויון נראה כך

$$x>x-1$$
$$0>-1$$

מתקיים בכל התחום.

תחום שני $-1\le x\le 0$

בתחום זה $f(x)=|x+1|=x+1$

$$f(f(x))=f(x+1)$$

נפריד בעצם לתחום $-1<x\le 0$ (כי כאשר $x+1=0$ נקבל תוצאה אחרת)

בתת התחום הזה, $x+1>0$ ולכן $f(x+1)=x+1$

ואז אי השיוויון נראה כך

$$x+1>x+1-1$$

$$0>-1$$

מתקיים בכל התחום.

כעת נבדוק את תת התחום שהוא הנקודה $x=-1$

אי השיוויון נראה כך

$$f(f(-1))>f(-1)-1$$

$$f(0)>0-1$$

$$1>-1$$

מתקיים בנקודה.

נעבור לתחום הבא $-2 \leq x < -1$

בתחום זה $f(x) = |x+1| = -(x+1)$

$$f(f(x)) = f(-(x+1))$$

נרצה לדעת מה התחום של $(x+1)-$

$$-1 \leq x+1 < 0$$

$$0 < -(x+1) \leq 1$$

ולכן

$$f(-(x+1)) = -(x+1)$$

לכן בתחום זה אי השיוויון נראה כך

$$-(x+1) > -(x+1) - 1$$

$$0 > -1$$

מתקיים בכל התחום.

התחום הבא הוא $x < -2$

בתחום זה $f(x) = x^2$

ולכן

$$f(f(x)) = f(x^2)$$

$x^2 > 4$ ולכן $f(x^2) = x^2$

וסה"כ אי השיוויון נראה כך

$$x^2 > x^2 - 1$$

$$0 > -1$$

מתקיים תמיד.

סה"כ אי השיוויון מתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$

.2

מצאו את כל הפתרונות למשוואה $i \cdot z^4 = cis(\pi) + i$

נכפול בi

$$-z^4 = i \cdot (-1) + i \cdot i = -i - 1$$

$$z^4 = 1 + i = \sqrt{2}cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

הפתרונות הם

$$z_k = \sqrt[8]{2}cis\left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{4}\right)$$

עבור $k = 0,1,2,3,$

3. מצאו את נקודת החיתוך בין המישור $x + y + z = 6$ לבין הישר המאונך לו שעובר בנקודה $(1,1,1)$

הכיוון המאונך למישור (נורמל) הוא $(1,1,1)$ ולכן הישר המאונך למישור ועובר בנקודה $(1,1,1)$ נתון באופן פרמטרי ע"י

$$(1,1,1) + t(1,1,1) = (1 + t, 1 + t, 1 + t)$$

נציב נקודה כללית מהישר במישור, ונמצא את הנקודה.

$$1 + t + 1 + t + 1 + t = 6$$

$$3t = 3$$

$$t = 1$$

ולכן נקודת החיתוך היא $(2,2,2)$

4. הוכיחו את הטענות הבאות באינדוקציה:

א. לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

ב. לכל $2 \le n \in \mathbb{N}$ קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש $2^m \le n < 2^{m+1}$

סעיף א':

בדיקה עבור $n = 1$ צ"ל כי

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{2}$$

אכן

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$$

יהי n עבורו

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

צ"ל

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+2}$$

כעת

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k(k+1)}=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\underbrace{=}_{\text{הנחת האינדוקציה}}1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$

$$=1+\frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}=1+\frac{-n-1}{(n+1)(n+2)}=1-\frac{1}{n+2}$$

סעיף ב'

צ"ל לכל $n\in\mathbb{N}$ $2\le$ קיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש $2^m\le n<2^{m+1}$

בדיקה: עבור $n=2$ נבחר $m=1$ ואכן

$$2^1\le 2<2^2$$

בהנתן n עבורו הטענה נכונה, כלומר קיים m כך ש

$$2^m\le n<2^{m+1}$$

צ"ל עבור $n+1$, צריך למצוא k כך ש

$$2^k\le n+1<2^{k+1}$$

נחלק למקרים, אם $n+1<2^{m+1}$ נבחר $k=m$ ואכן

$$2^k<2^m+1\le n+1<2^{k+1}$$

אחרת, $n+1=2^{m+1}$ נבחר $k=m+1$ ואכן

$$2^k=n+1<2^{k+1}$$

כפי שרצינו.

5. פתרו את האינטגרל

$$\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)\,(2\sin^2(x)+\cos^2(x))}dx$$

$$\int\frac{\cos(x)}{\sin(x)\,(2\sin^2(x)+\cos^2(x))}dx=\begin{Bmatrix}t=\sin(x)\\dt=\cos(x)\,dx\end{Bmatrix}=\int\frac{1}{t(2t^2+1-t^2)}dt=\int\frac{1}{t(t^2+1)}dt=$$

נפרק את הביטוי לשברים חלקיים

$$\frac{1}{t(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{Bt+C}{t^2+1}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$1 = A(t^2+1) + (Bt+C)t$$

נציב $t=0$ ונקבל

$$A = 1$$

נציב $t=1$

$$1 = 2 + B + C$$
$$B + C = -1$$

נציב $t=-1$

$$1 = 2 - (-B + C)$$
$$B - C = -1$$

נחבר את שתי המשוואות ונקבל כי $2B=-2$ כלומר $B=-1$ ולכן $C=0$

סה"כ הפירוק הוא

$$\frac{1}{t(t^2+1)} = \frac{1}{t} - \frac{t}{t^2+1}$$

$$\int \frac{1}{t}dt = \ln|t|$$

$$\int \frac{t}{t^2+1}dt = \begin{Bmatrix} u = t^2+1 \\ du = 2tdt \\ \frac{1}{2}du = tdt \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)$$

סה"כ

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)\,(2\sin^2(x)+\cos^2(x))}dx = \begin{Bmatrix} t = \sin(x) \\ dt = \cos(x)\,dx \end{Bmatrix} = \int \frac{1}{t(t^2+1)}dt = \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(t^2+1) + C =$$

$$= \ln\ |\sin\,(x)| - \frac{1}{2}\ln(\sin^2(x)+1) + C$$

6. <u>הגדרה:</u> תהי X קבוצת קבוצות של מספרים. X נקראת <u>אחלה קבוצה של קבוצות</u> אם

$$\forall A \in X \exists B \in X : \neg(B \subseteq A)$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש X אינה אחלה קבוצה של קבוצות.

ב. קבעו **והוכיחו** לכל קבוצה אם היא אחלה קבוצה של קבוצות:

$X = \emptyset$ $\qquad$ $Y = \{\{1,2,\dots,n\} | n \in \mathbb{N}\}$ $\qquad$ $Z = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\}\}$

סעיף א':

$$\exists A \in X \forall B \in X : B \subseteq A$$

סעיף ב':

האם $X = \emptyset$ הוא אחלה אוסף של קבוצות או לא?

כן, באופן ריק. כל טענה המתחילה ב$\forall A \in \emptyset$ היא אמת באופן ריק.

Z אינה אחלה קבוצה של קבוצות כי –

נבחר $A = \{1,2,3\}$ ואכן לכל $B \in Z$ מתקיים כי $A \subseteq B$ (בודקים ידנית את שלושת הקבוצות).

לגבי Y, ראשית נבין כי

$$Y = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots\}$$

תהי $A \in Y$ צריך למצוא $B \in Y$ כך ש $A \nsubseteq B$

נסמן

$$A = \{1,2, \dots, n\}$$

נבחר

$$B = \{1,2, \dots, n+1\}$$

וכמובן ש $A \nsubseteq B$ כי $n+1 \in B$ אבל $n+1 \notin A$

7. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \in B$ וכן $B \in C$ אזי $A \in C$.

ב. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \subseteq B \setminus C$ אזי $A \setminus C \subseteq B$.

סעיף א' הפרכה

$$A = \emptyset$$

$$B = \{\emptyset\}$$

$$C = \{B\} = \{\{\emptyset\}\}$$

לכן $A \in B, B \in C$ אבל $A \notin C$

סעיף ב'

תהיינה שלוש קבוצות A, B, C כך ש $A \subseteq B \setminus C$

צ"ל $A \setminus C \subseteq B$

יהי $x \in A \setminus C$

צ"ל $x \in B$

נתון ש $A \ni x$ וכן $x \notin C$

כעת, כיוון ש $A \ni x$ וכן $A \subseteq B \setminus C$ נובע כי

$$x \in B \setminus C$$

ולכן $x \in B$, משל.