

מבחן מועד ב' בקורס הכנה למתמטיקה לקראת שנת תשפ"ו

תאריך: 16/10/25

מרצה: ד"ר ארז שיינר.

הוראות: יש לפתור כמה שיותר שאלות ולנמק היטב. כל שאלה שווה 17 נקודות. בהצלחה (=)

שאלה 1: נגדיר את הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 1 \\ 1-x & 0 \leq x \leq 1 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

מצאו לאילו ערכי x מתקיים אי השוויון $f(1+f(x)) \geq x$

שאלה 2:

א. מצאו את כל הפתרונות המרוכבים $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $i \cdot z^5 = -1$

ב. מצאו את כל הפתרונות המרוכבים $z \in \mathbb{C}$ למשוואה $(z + \bar{z} - 2)^2 + (z \cdot \bar{z} - 1)^2 = 0$

שאלה 3:

נביט בישר העובר בנק' $(1,1,1)$ בכיוון $(1,0,-1)$, ונביט בישר העובר בנקודה $(1,2,3)$ ובכיוון $(-2,1,4)$.
האם יש נק' חיתוך בין שני הישרים? אם כן מצאו אותה, אם לא הראו שאין.

שאלה 4:

יהי $q \neq \pm 1$. הוכיחו את הטענה הבאה באינדוקציה או בכל דרך אחרת: לכל $n \in \mathbb{N}$ $2 \leq n$ מתקיים כי

$$\sum_{k=1}^{n-1} q^{2k} = \frac{q^2 - q^{2n}}{1 - q^2}$$

שאלה 5: פתרו את האינטגרל

$$\int \frac{\ln(\ln(x))}{x} dx$$

שאלה 6:

הגדרה: פונקציה $f(x)$ נקראת חמודה אם

$$\forall a \in \mathbb{R} \exists b \in \mathbb{R}: f(a) = f(b) + 1$$

א. נסחו תנאי השקול לכך ש- $f(x)$ אינה חמודה.

ב. קבעו והוכיחו לכל אחת מן הפונקציות הבאות אם הן חמודות

$$f(x) = 0, \quad g(x) = \sin(x), \quad h(x) = 2x - 1$$

שאלה 7: הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

א. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \subseteq B$ וכן $A \subseteq C$ אזי $A \subseteq B \cap C$.

ב. לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \subseteq B$ וכן $A \subseteq C$ אזי $A \subseteq B \cup C$.