תרגיל בית 3 במבוא לתורת החבורות
סמסטר א' תש"ף

שאלה 1. יהי $\sigma \in Sn$ מחזור מאורך k. חשבו את $o(\sigma)$ והוכיחו קביעתכם.

שאלה 2. בתרגיל הבית הקודם חישבתם חזקות של התמורה $\sigma = (257)(423)(57)(3416) \in S_8$. מצאו את סדרה ואת תת-החבורה הנוצרת על ידה.

שאלה 3. עוד הראיתם בתרגיל הקודם כי קבוצת המטריצות

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

היא תת־חבורה של $GL_2(\mathbb{Z}_2)$. מצאו את הסדר של H ואת הסדר של איברי H. האם H ציקלית?

שאלה 4. תהי G חבורה אבלית. נסמן ב-T את אוסף האיברים מסדר סופי ב-G. הוכיחו כי $T \leq G$.

שאלה 5. יהיו $f \colon G \to H$ ו-$g \colon H \to K$ הומומורפיזמים של חבורות. הוכיחו שההרכבה $g \circ f \colon G \to K$ היא הומומורפיזם.

שאלה 6. עבור כל אחת מן ההעתקות הבאות קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם, מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

א. $f \colon \mathbb{Q}^* \to \mathbb{Q}^*$ המוגדרת לפי $f(x) = x^2$.

ב. $f \colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^+$ המוגדרת לפי $f(x) = x^4$ כאשר $\mathbb{R}^+$ זו חבורת המספרים הממשיים החיוביים עם כפל רגיל.

ג. $f \colon S_7 \to \mathbb{Z}$ המוגדרת לפי $f(\sigma) = \sigma(1)$.

ד. $f_x \colon G \to G$ המוגדרת לפי $f_x(g) = xgx^{-1}$ כאשר G חבורה ו-$x \in G$ איבר.

שאלה 7. יהי $f \colon G \to H$ הומומורפיזם.

א. הוכיחו שאם G אבלית, אז גם $\operatorname{id} f$ אבלית. הפריכו את הכיוון השני.

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שאם $H \cong G$, אז G אבלית אם ורק אם H אבלית.

שאלה 8 (רשות)**.** מצאו חבורה אינסופית שלכל $n \in \mathbb{N}$ קיים בה איבר מסדר n. האם אתם יכולים גם להבטיח שהסדר של כל האיברים הוא סופי?

כמו כן, לכל $m > 1$ מצאו חבורה אינסופית G_m שהסדר של כל איבר בה הוא לכל היותר m.

האם אתם יכולים למצוא דוגמאות לשאלות האלו כך שהחבורות הן מעוצמה $\aleph_0$?

שאלה 9 (רשות). נקרא למטריצה M מטריצת תמורה אם היא מטריצה שכל האיברים בה הם אפסים ואחדות, ושבכל שורה ובכל עמודה יש בדיוק פעם אחת 1. למשל

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

היא מטריצת תמורה בגודל 4×4. הוכיחו שאוסף מטריצות התמורה בגודל $n \times n$ הוא חבורה עם הפעולה של כפל מטריצות. התאימו לכל איבר $\sigma \in S_n$ מטריצת תמורה M_σ כך שיתקבל איזומורפיזם, והוכיחו שהסימן של σ הוא הדטרמיננטה של M_σ.

בהצלחה!