חורף תשע"ד

פונקציות מרוכבות למהנדסים

תרגיל כיתה 3: סדרות וטורים של מספרים מרוכבים

1. משפט:

$z_n \to z_0$ אםם $\Re(z_n) \to \Re(z_0)$; $\Im(z_n) \to \Im(z_0)$.

הוכחה:

כוון א: נניח כי $z_n \to z_0$ כלומר

$\lim_{n\to\infty}|z_n - z_0|^2 = \lim_{n\to\infty}|\Re(z_n) - \Re(z_0) + i(\Im(z_n) - \Im(z_0))|^2 = \lim_{n\to\infty}(\Re(z_n) - \Re(z_0))^2 + \lim_{n\to\infty}(\Im(z_n) - \Im(z_0))^2 = 0$

ולכן $\lim_{n\to\infty}\Re(z_n) = \Re(z_0),\ \lim_{n\to\infty}\Im(z_n) = \Im(z_0)$.

כוון ב: נניח כי $\Re(z_n) \to \Re(z_0)$; $\Im(z_n) \to \Im(z_0)$, כלומר

$\lim_{n\to\infty}|z_n-z_0| \le \lim_{n\to\infty}|\Re(z_n)-\Re(z_0)|+\lim_{n\to\infty}|\Im(z_n)-\Im(z_0)| = 0$, ולכן $\lim_{n\to\infty}|z_n - z_0| = 0$.

2. הראו כי $\lim_{n\to\infty} z_n$ כאשר $z_n = i^n$ לא קיים.

נרשום $z_n = \text{cis}\frac{n\pi}{2}$ ולכן $|z_n| = 1$, $\arg(z_n) = \frac{n\pi}{2}\text{mod}(2\pi)$.

כעת, $\lim_{n\to\infty}|z_n| = 1$ ואילו $\lim_{n\to\infty}\arg(z_n)$ לא קיים. על כן, $\lim_{n\to\infty} z_n$ לא קיים.

3. בדקו האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n/2^n$ מתכנס.

נבדוק התכנסות בהחלט:

$\sum_{n=1}^{\infty}|(1+i)^n/2^n| = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}^n/2^n = \sum_{n=1}^{\infty}(1/\sqrt{2})^n < \infty$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)^n/2^n < \infty$.

4. הוכיחו כי לכל $|z| < 1$ הטור הגאומטרי $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ מתכנס וסכומו $1/(1-z)$.

נרשום את סדרת הסכומים החלקיים

$s_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = (z^{n+1} - 1)/(z-1)$. כעת

$\lim_{n\to\infty} s_n = (\lim_{n\to\infty} z^{n+1} - 1)/(z-1)$.

נשאר להראות כי $\lim_{n\to\infty} z^{n+1} = 0$. באמת, $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \to 0$ לכל $|z| < 1$ וסיימנו.